1.- A una partícula (inicialmente en reposo) de masa 5 kg se le aplica una fuerza de 10 N durante 2 s. El movimiento se realiza sobre una mesa horizontal en donde no hay roce. La mesa posee una altura de 1,18 m.

a.- Determine el impulso recibido por la partícula.

b.- Suponga que en el tercer segundo la partícula llega al borde de la mesa, cae al piso y queda pegada en él. Determine el cambio de momento lineal.

Solución.

a.- El impulso es un cambio del momento lineal para la partícula. Es un vector y como en este caso es un movimiento en una dimensión se puede escribir:

$$I_x = p_{2x} - p_{1x}$$

en donde se ha supuesto que la partícula se mueve sobre el eje x ya que el movimiento es en una dimensión.

Como

$$\Delta p_x = F_{prom}\,\Delta t,$$

entonces

$$\begin{aligned} I &= 10x2 \ \ \mathrm{Ns} \\ &= 20 \text{ kg m /s.} \end{aligned}$$

A la partícula se le aplicó el anteriormente calculado impulso; eso significa que si ella partió del reposo alcanzó la velocidad de 4 m/s en 2 s. De ahí en adelante se mueve en línea recta con esa velocidad.

b.- Cuando la partícula está en el borde de la mesa posee un momento lineal de

$$\begin{aligned} p_x &= m\, v_x \\ &= 20 \text{ kg m /s.} \end{aligned}$$

Cuando ella llega al piso, justo antes de chocar, su momento lineal es

$$\vec{p} = 20\hat{i} - 24\hat{j} \text{ kg m/s}$$

y su momento lineal final, cuando ha quedado pegada al piso es

$$\vec{p} = 0\ .$$

Por lo tanto la respuesta a la pregunta es o depende de lo que cada uno considere como instante inicial y cual final. Para no ser ambiguos consideremos el cambio de momento lineal entre el instante justo antes de chocar con el piso y el instante en que ya está en reposo final. Luego,

$$\Delta\vec{p} = 0 - \ 20\hat{i} - 24\hat{j} \text{ kg m/s}$$

$$\Delta\vec{p} = - \ 20\hat{i} + 24\hat{j} \text{ kg m/s}$$

Si usted hubiese considerado el instante en que abandona la mesa y el instante en que choca con el piso el cambio de momento lineal sería

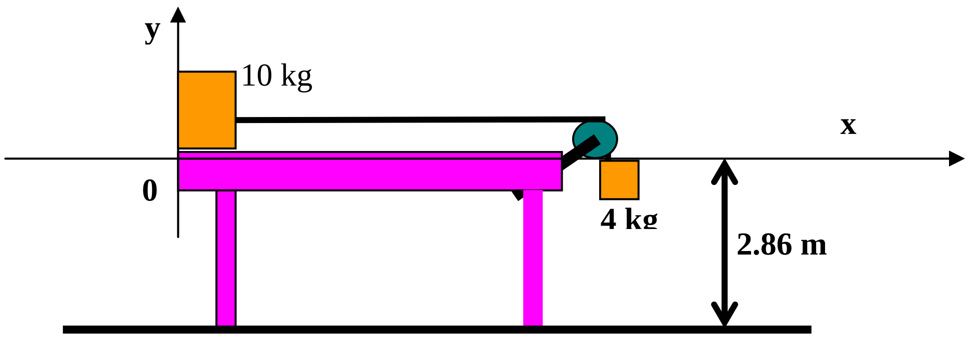
$$\Delta\vec{p} = -24\hat{j} \text{ kg m/s}.$$

Intente llegar a los valores entregados; para ello recuerde el significado de variación y de momento lineal.

2.- La figura muestra un cuerpo de masa M=10 kg que está unido a otro de masa m=4 kg por medio de una cuerda inextensible y sin masa. Considere que no hay roce entre la polea y la cuerda. La mesa posee un largo L=4m y el cuerpo de masa M estaba inicialmente en el origen del sistema de coordenadas. Una vez que m choca con el piso no rebota. El sistema inicialmente estaba en reposo.

a.- Suponga que el proceso de detención (sin rebote) de la masa pequeña al chocar con el piso se realiza en un tiempo de 0,4 s. ¿Qué fuerza promedio ejerce el piso sobre el cuerpo de masa 4 kg?, ¿Cuánta energía pierde la masa m en el choque?, ¿Se conserva el momento lineal en este sistema?

b.- Encuentre la velocidad del centro de masa del sistema antes de que m = 4 kg haya chocado con el piso.



Solución.

a.- Por conservación de energía mecánica podemos determinar la velocidad del cuerpo que cae justo cuando llega al piso, nos da

$$\vec{v} = -4\,\hat{j}\ \text{m/s}$$

luego el cambio de momento angular para ese cuerpo es

$$\Delta\vec{p} = 16\,\hat{j}\ \text{kg m/s}$$

y la fuerza promedio ejercida sobre el cuerpo de masa 4 kg por el piso durante los 0.4 s es $\vec{F} = 40\,\hat{j}\ \text{N}$.

La energía perdida por el cuerpo de 4 kg corresponde a toda su energía (que es sólo energía cinética) que poseía antes de chocar, es decir, 32 J.

Al cuerpo que se mueve sobre la mesa si le ocurre algo diferente, desde cero energía aumentó hasta 80J y en los 1.14 m restantes se mueve con velocidad constante (¿por qué constante?) hasta chocar con la polea.

Durante todo el movimiento existe una fuerza externa que influye sobre el comportamiento del sistema: la fuerza peso sobre la masa de 4 kg, ¿por qué no influye el peso sobre la masa mayor? De acuerdo con el principio de conservación del momento lineal, éste se conserva si la suma de las fuerzas externas es cero; aquí no es cero esa suma, de hecho es $-39.2\,\hat{j}\,N$ hasta que el cuerpo de masa 4 kg choca con el piso. Posterior a ello, y hasta que el otro cuerpo colisiona con la polea, la suma de las fuerzas externas es cero.

b.- De acuerdo con las condiciones físicas entregadas y el sistema de referencia dibujado, y hasta antes de que el cuerpo de 4 kg choque con el piso, la velocidad del centro de masa (CM) para instantes anteriores al choque de la masa de 4 kg con el piso es

$$\vec{V} = \frac{10x2.8t\,\hat{i} - 4x2.8t\,\hat{j}}{14}\,m/s$$

$$\vec{V} = 2t\,\hat{i} - 0.8t\,\hat{j}\,m/s \qquad 0 \le t \le 1.43\ s.$$

Su valor para el instante inicial es cero y para cuando la masa de 4 kg choca con el piso es (t≈1.43 s)

$$\vec{V} = 2.86\,\hat{i} - 1.14\,\hat{j}\,m/s.$$

La trayectoria del CM durante ese intervalo de tiempo es diferente a la trayectoria de cada una de las masas, de hecho corresponde a

$$\vec{R} = \frac{10x1.4t^2\,\hat{i} + 4x(4\hat{i} - 1.4t^2\,\hat{j})}{14}\,m$$

$$\vec{R} = (1.14 + t^2)\,\hat{i} - 0.4t^2\,\hat{j}\ m \qquad 0 \le t \le 1.43\ s$$

que, expresada en términos de las coordenadas, queda

y =0.46 - 0.4 x.

que corresponde a una recta oblicua en el sistema de referencia utilizado.

Una vez que la masa de 4 kg choca con el piso y hasta que la de 10 kg choca con la polea el CM se mueve con velocidad y posición:

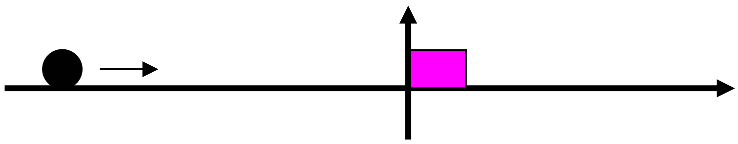
$$\vec{V} = 2.86\,\hat{i}\ m/s \quad y$$

$$\vec{R} = (3.18 + 2.86(t - 1.43))\,\hat{i} - 0.82\,\hat{j}\ m, \qquad \mathbf{1.43\ s \le t \le 1.86s}$$

3.-.- **La figura muestra una bola de masa M que se lanza contra un bloque de masa 4M, en reposo. La bola viaja a lo largo del eje x con velocidad v_o y el otro cuerpo está en el origen del sistema de coordenadas. Los cuerpos chocan y el bloque se desplaza deteniéndose después de recorrer L metros. El coeficiente de roce entre la superficie y el bloque es μ.**

a- determine la velocidad de la bola después del choque.

b.- Para un observador ubicado en el centro de masa del sistema determine la velocidad de los cuerpos antes y después del choque.



Solución.

a.- En esta situación se tiene una fuerza externa que influye en el movimiento, por tanto no se conserva el momento lineal. Sin embargo, el intervalo de tiempo en que se desarrolla el choque es muy inferior al tiempo en que la fuerza de roce actúa; de ese modo se puede pensar en que el bloque adquiere su velocidad inicial (con la que inicia su movimiento de detención producto del roce) mientras ambos cuerpos efectivamente están chocando. En consecuencia durante ese pequeño intervalo de tiempo Si se puede aplicar la conservación del momento lineal pues la fuerza de roce no ha comenzado a actuar. De ese modo, y como el movimiento es en una dimensión,

$$Mv_o = Mv'_{1x} + 4Mv'_{2x} \ .$$

No se dice si el choque es elástico o no, por tanto no se puede aplicar conservación de la energía. La no aplicación de la conservación de la energía cinética en este caso mientras ocurre el choque **NO** está relacionada con la existencia de fuerzas de roce. Para conocer V'_{2x} (la velocidad inicial del bloque cuando se despega de la bola y comienza su movimiento de detención) aplicamos la condición de que se detiene después de recorrer L metros. Suponiendo que toda la energía cinética que adquirió el bloque producto del choque se pierde como trabajo realizado realizado por la fuerza de roce:

$$-(4\,M\,v'^2_{2x})/2 = -\mu\,4\,M\,g\,L$$
$$v'_{2x} = \sqrt{2}\mu\,g\,L$$

que reemplazado en la conservación del momento lineal permite determinar la velocidad de M,

$$v'_{1x} = v_o - 4\sqrt{2}\mu\,g\,L \ .$$

De el resultado se ve que la velocidad de la bola puede ser positiva, cero o negativa dependiendo de la magnitud de v_o respecto del otro valor. La única duda al respecto es que pasa si v'1x es positiva: de acuerdo con el resultado positivo la masa M continuaría hacia la derecha con velocidad constante pero el bloque también se mueve en esa dirección y con velocidad decreciente, por tanto en algún momento deberían volver a chocar. La otra alternativa es que hayan continuado juntos y, en ese caso la velocidad de M es la misma que la de 4M e igual a $v_o/5$ para justo después del choque. Ambas continuarían juntas y recorrerían una distancia de v_o^2 / (50μg) metros. Este último valor se obtiene igualando energía cinética justo después del choque ($2.5Mv_o^2$) con energía perdida por efecto de la fuerza de roce (5MgμΔx); se supone que nada se perdió en forma de calor.

b.- Para realizar esta parte debemos, primero encontrar la velocidad del CM y posteriormente aplicar velocidades relativas.

$$\vec{V} = \frac{Mv_o\,\hat{i}}{5M}\ \text{m/s}$$

$$\vec{V} = \frac{v_o}{5}\hat{i}\ \ \text{m/s}$$

las transformaciones de Galileo nos dicen que dado un sistema de referencia fijo O y un sistema de referencia O' que se mueve con velocidad constante respecto de O, la velocidad de un objeto de masa m en cada uno de los sistemas de referencias están relacionada:

(vel. de m respecto de O) = (vel. de O' respecto de O) + (vel. de m respecto de O')

y como el movimiento es en una dimensión tenemos,
Antes del choque:
para M $\quad v'_x = v_o - v_o/5$

$\quad = (4/5)v_o$

para 4M $\quad v'_x = 0 - v_o/5$

$\quad = - v_o/5.$

Después del choque la velocidad del CM ha cambiado:

$$V_x = \frac{M(v_o - 4\sqrt{2\mu gL}) + 4M\sqrt{2\mu g(L-x)}}{5M}$$

$$V_x = ((v_o - 4\sqrt{2\mu gL}) + 4\sqrt{2\mu g(L-x)}\ \ )/5$$

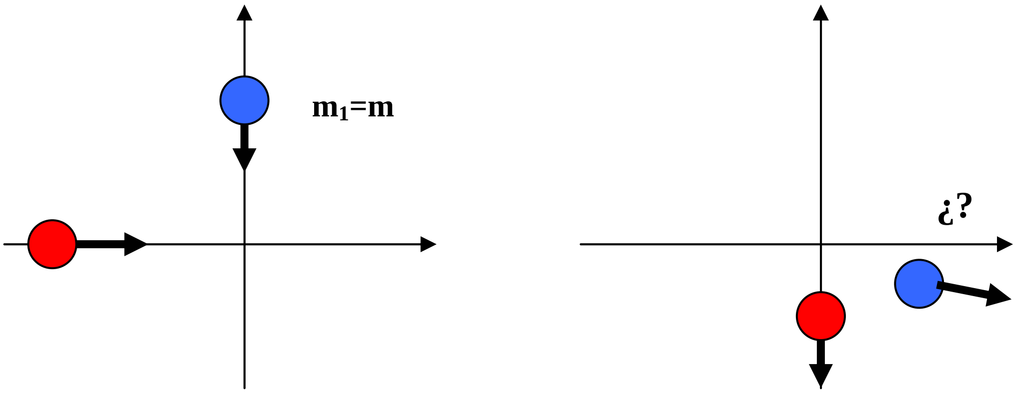
Para M $\quad v'_x = v_o - 4\sqrt{2\mu g L} - (V_{CM})_x$

Para 4M $\quad v'_x = [2\mu g (L-x)]^{1/2} - (V_{CM})_x$
siendo V_{CM} la expresión V_x calculada previamente.
Investigue Ud lo que ocurre después que 4M se detuvo.

4.- Una bola de billar de masa 200g viaja con velocidad v_y =- 10 m/s choca no frontalmente con otra bola de billar que viajaba a 6 m/s en dirección del eje x+. Después del choque la segunda bola sale desviada en 90 º respecto de su dirección original conservando su rapidez.
a.- Determine la velocidad de la primera bola después del choque. El choque es ¿elástico o inelástico?
b.- Si el choque fuese perfectamente inelástico, calcule las velocidades después del choque.

Solución.

a.- La figura muestra la situación, antes y después del choque.



Como no hay fuerzas externas actuando en la dirección del movimiento se puede aplicar conservación del momento lineal en el espacio xy:

$$mv_{1x} + mv_{2x} = mv'_{1x} + mv'_{2x}$$

$$mv_{1y} + mv_{2y} = mv'_{1y} + mv'_{2y}$$

reemplazando los datos entregados en el enunciado estas dos ecuaciones quedan

$$mv_2 = mv'_{1x}$$

$$- mv_1 = mv'_{1y} - mv'_2$$

en donde se ha usado el hecho que las velocidades conocidas se han expresado con su módulo y el signo correspondiente a la dirección. Simplificando por m, resulta

$$v'_{1x} = v_2$$
$$= 6 \text{ m/s}$$

$$v'_{1y} = v'_2 - v_1$$
$$= 6 - 10 \text{ m/s}$$
$$= - 4 \text{ m/s.}$$

La velocidad de la primera partícula después del choque es

$$\vec{v} = 6\hat{i} - 4\hat{j} \text{ m/s}.$$

La energía cinética antes del choque es

$$E = 13.6 \text{ J} \quad \text{y}$$

Energía cinética después

$$E = 8.8 \text{ J},$$

luego la energía cinética no es la misma y el choque es del tipo no elástico. De hecho se perdió un 35% de la energía.
En las condiciones dadas del enunciado, ¿es posible exigir que el choque sea perfectamente elástico? La respuesta es NO; y ello porque debería darse conservación de momento lineal y energía cinética simultáneamente, cosa que ya se demostró no se cumple.

b.- si el choque es perfectamente inelástico significa que ambas partículas continúan juntas después del choque. En ese caso,

$$mv_2 = (m+m)v'_x$$

$$-mv_1 = (m+m)v'_y,$$

por tanto

$$v'_x = 3 \text{ m/s}$$

y

$$v'_y = -5 \text{ m/s},$$

$$\vec{v} = 3\hat{i} - 5\hat{j} \text{ m/s}$$

Calcule la pérdida de energía en este caso. Debiera resultar 50%.

Extra. Determine la velocidad del centro de masa antes y después del choque para las situaciones a y b. Debe resultar

$$\vec{v} = 3\hat{i} - 5\hat{j} \text{ m/s}$$

para ambos casos.
Además calcule las velocidades de ambas partículas respecto del centro de masa en las mismas 2 situaciones. Debe resultar, en la situación "a" y antes del choque,

$$\vec{v} = -3\hat{i} - 5\hat{j} \text{ m/s} \quad \text{para la partícula 1 y}$$

$$\vec{v} = 3\hat{i} + 5\hat{j} \text{ m/s} \quad \text{para la partícula 2.}$$

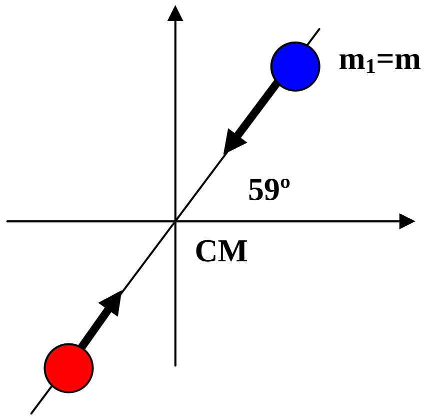
Después del choque

$$\vec{v} = 3\hat{i} + \hat{j} \text{ m/s} \quad \text{para la partícula 1 y}$$

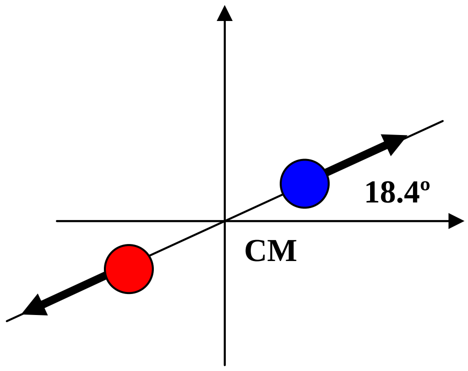
$$\vec{v} = -3\hat{i} - \hat{j} \text{ m/s} \quad \text{para la partícula 2.}$$

Notar que las velocidades son diferentes después del choque. En ambos casos si ud suma las velocidades le da un cero, ello porque las masas son iguales y están referidas al CM y por tanto es lógico que la velocidad del CM respecto de sí mismo sea cero.
Observe además que, respecto del CM, las partículas se mueven en línea recta para un choque aparentemente frontal:

Desde el punto de vista del CM (que se mueve con velocidad ya calculada)

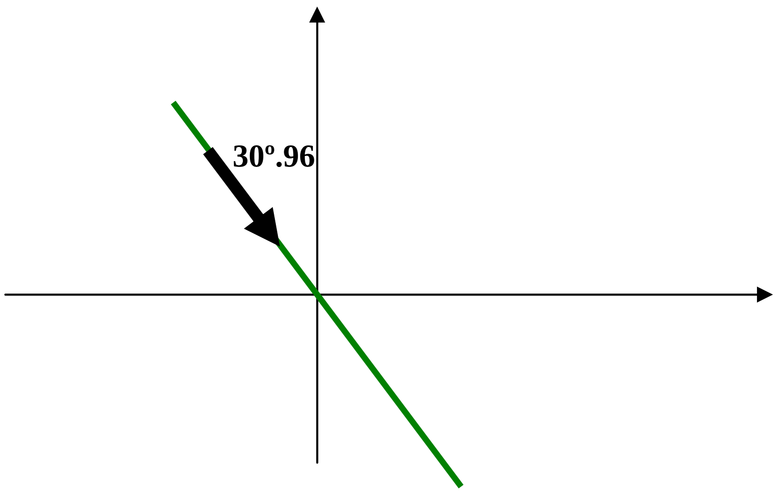


Antes de chocar



después de chocar

El sistema de referencia dibujado es el sistema “prima” en las transformaciones de Galileo.   La figura siguiente corresponde a la trayectoria que sigue el CM en ambos casos, es decir, “a” y “b” respecto del sistema de referencia inercial fijo



Nota. Errores comunicarlos a **jmorales@udec.cl**