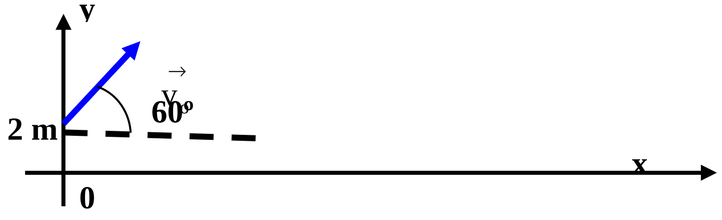
1.- La figura muestra el lanzamiento de una pelota de masa 0.5 kg sometida a la acción de la gravedad. El lanzamiento es desde una altura de 2 m respecto del piso y con una velocidad de 20 m/s en un ángulo de 60º con la horizontal. Usando el sistema de referencia mostrado, determine:
a.- El momento angular de la pelota en instante inicial y final de la trayectoria.
b.- El torque al cual está sometida la pelota.



Solución
a.- en todo momento el vector momento angular, dada la posición y el momento lineal de la partícula, es $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$.
En el instante inicial la posición y momento lineal son

$$\vec{r} = 2\,\hat{j}\ \text{m} \quad \text{y} \quad \vec{p} = 5\,\hat{i} + 8.66\,\hat{j}\ \text{kg m/s}$$

por tanto $\vec{L} = -10\,\hat{k}\ \text{kgm}^2/\text{s}$

en donde el 10 se obtiene de r p sen30 o bien haciendo el producto

$$(2\,\hat{j}) \times (5\,\hat{i} + 8.66\,\hat{j})\ \text{kg m}^2/\text{s},$$

en cuyo caso el signo sale directo. Con el primer método el signo se obtiene usando la regla de la mano derecha.
En el punto final de la trayectoria se tiene

$$\vec{r} = 35.9\,\hat{i}\ \text{m} \quad \text{y} \quad \vec{p} = 5\,\hat{i} - 8.93\,\hat{j}\ \text{kg m/s}$$

$$\vec{L} = -320.59\,\hat{k}\ \text{kgm}^2/\text{s}$$

para llegar al resultado anterior debe hacer el producto cruz entre la posición y momento lineal y para ello se sigue el mismo camino que se usó en el cálculo del momento angular inicial.

b.- Torque.
La única fuerza que actúa sobre la pelota es su peso, mg, y esta fuerza hace un torque respecto del origen señalado en la figura:

$$\vec{\tau} = (x\,\hat{i} + y\,\hat{j}) \times (-g\,\hat{j})$$

en donde queda solamente el producto de los vectores i y j pues j x j =0, por tanto

$$\vec{\tau} = (10t\,\hat{i}) \times (-g\,\hat{j})$$
$$= -98t\,\hat{k}\ \text{Nm}$$

notar que para t = 0 el torque es cero según l resultado anterior; lo cual es verdad pues los vectores posición y peso son antiparalelos en ese momento. El tiempo fluctúa entre 0 y 3.59 s. El torque apunta en la dirección negativa del eje z.

2.- La luna orbita en un círculo alrededor de la tierra. Considere que el centro del círculo coincide con el centro de nuestro planeta tierra.

a.- Determine el momento angular de la luna respecto de la tierra. La luna, ¿posee un momento angular intrínseco? Y si es así, ¿cuál sería su momento angular?

b.- Se desea pasar la luna a una órbita circular alrededor de la tierra que esté a la mitad de la distancia original; ¿qué cambios ocurrirían?

Solución.

a.- El momento angular se determina usando su definición

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}.$$

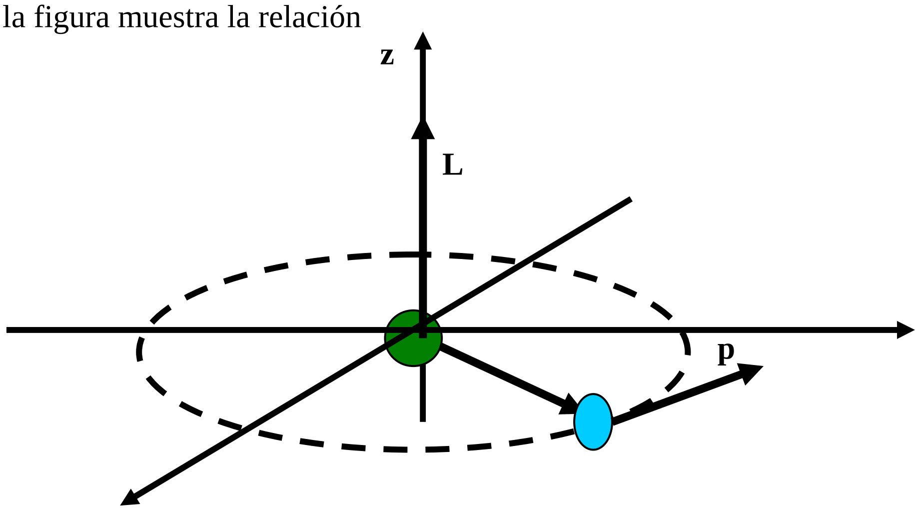
La aplicación de esta expresión depende de cada caso, si es una partícula, un conjunto de partículas, un sólido, si es un movimiento recto, circular, etc. En la presente situación el movimiento es circular, luego r y p forman un ángulo de 90º entre sí y por tanto

$$L = R\, m\, v,$$

en donde R es la distancia tierra – luna, m es la masa de la luna y v ($= 2\pi R / T$ siendo T un año) su velocidad orbital. Poniendo los datos (obtenidos de cualquier libro de física) resulta,

$$L = 2.16 \times 10^{33} \text{ kgm}^2/\text{s}$$

y su dirección depende del sentido horario o antihorario asignado al movimiento de la luna; la figura muestra la relación



El mismo resultado pudo obtenerse calculando L con la relación

$$L = I\, \omega$$

en donde

$I = mR^2$
$= 7.36x10^{22}\ x(3.84x10^8)^2\ kgm^2$ y
$\omega = 2\ \pi\ /\ T$ siendo T = 1 año.
$\approx 2 \times 10^{-7}$ rad / s.

Notar que en este caso las fuerzas que intervienen (dentro del sistema solar) son todas del tipo fuerzas centrales, por tanto no ejercen torque y podemos concluir que el momento angular calculado es constante. Ello implica que la luna se moverá (siempre) en el plano definido por el vector posición y el momento lineal, de igual manera que la tierra respecto del sol: se mueve siempre en el plano de la eclíptica, que es el plano definido por el vector posición y memento lineal de la tierra respecto del sol,

La luna, al mismo tiempo que se mueve alrededor de la tierra gira sobre sí misma con una velocidad angular de
$\omega = 2\ \pi\ /\ T$ siendo $T \approx 27$ dias.
$\approx 2.7 \times 10^{-6}$ rad / s.
El momento de inercia de la luna respecto de un eje que la atraviese polo a polo es
$I = (2/5)mr^2$
$= (2/5) \times 7.36 \times 10^{22} \times (1.74 \times 10^{6})^2$ kg m^2

por tanto el momento angular (de espin) de la luna es

$$L = 2.4 \times 10^{29}\ kg\ m^2 / s.$$

b.- Al cambiar de órbita y suponiendo que continúa moviéndose en un círculo se tiene:

El torque seguiría siendo nulo pues la fuerza gravitatoria es antiparalela con el vector posición, su momento angular debería ser constante ya que el torque es cero (τ=dL/dt). Para mantenerse en órbita estable su nueva velocidad angular debiera ser 2.83 veces mayor que la anterior:

$$G\ m\ M/[\ (R/2)^2] = m\ (R/2)\ \omega^2$$

$$[\ 2 \times (2)^2]\ G\ m\ M/[\ (R)^2 = m\ R\ \omega^2$$

de donde se deduce $\omega = 2.83\ \omega_o$.

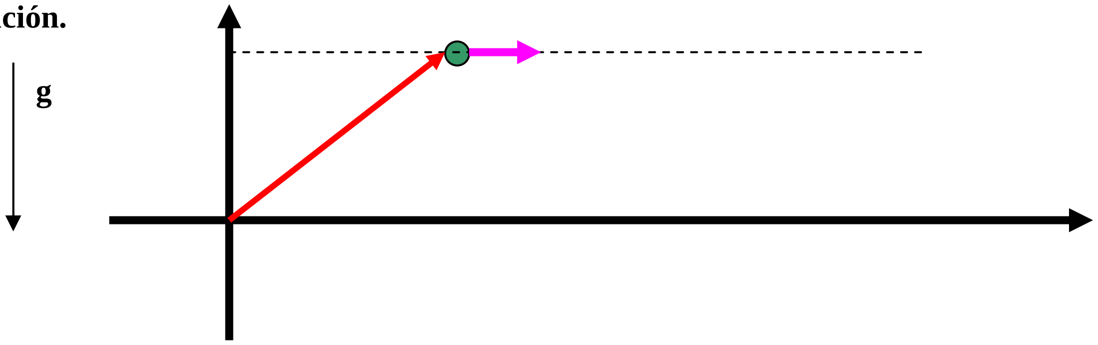
Su momento de inercia cambia, ahora es 0.25 veces el momento de inercia anterior.

Su nuevo momento angular ($I\omega$) será 0.7075 $I_o\omega_o$.

Su periodo será de aproximadamente 9.5 días en lugar de los 27 días originales.

3.- Un bala de masa 20 g es disparada a 400 m/s horizontalmente por una pistola que está a 1.6 m de altura. Suponga que en los primero 100 m de recorrido la dirección del movimiento prácticamente no cambia. Respecto de un sistema de referencia con el eje x en el piso y el eje y perpendicular a la superficie de la tierra determine el momento lineal y el momento angular.

Solución.



El momento lineal es un vector producto de la masa de la bala por su velocidad. En este caso es sencillo pues la velocidad coincide en dirección con el eje x, en consecuencia

$$p_x = m\, v_x$$

$$p_x = 0.020 \text{ x } 400 \text{ kg m /s}$$
$$= 8 \text{ kg m / s.}$$

El momento angular es el producto cruz entre el vector posición y momento lineal. En este caso

$$\vec{r} = (400t\,\hat{i} + 1.6\,\hat{j})\text{ m} \quad \text{y}$$

$$\vec{v} = 400\,\hat{i}\text{ m/s}$$

por tanto

$$\vec{L} = 0.02x1.6 \text{ x } 400\,\hat{j} \text{ x } \hat{i} \text{ kg m}^2\text{ /s}$$

$$\vec{L} = -12.8\,\hat{k} \text{ kg m}^2\text{ /s}$$

en donde el signo menos se obtiene con la regla de la mano derecha. Al mismo resultado se llega haciendo

$$L = r\, m\, v \text{ sen } \varphi$$

En donde el ángulo es 90º o menor que eso. Sin embargo el producto r sen φ es la proyección de r sobre el eje y, que posee el mismo valor (1.6 m) para cualquier valor de r y ángulo descrito por la bala.
Una importante conclusión de este ejercicio es que para movimientos rectilíneos con velocidad constante, ya sea de una partícula o de un CM, el momento angular es una constante del movimiento.

4.- En los muchos problemas de choques se aplica la conservación del momento lineal, ¿se conserva el momento angular del sistema en estos casos?

Solución.

Si el choque es en una dimensión el momento angular es nulo pues velocidad y posición son colineales (φ = 0 o 180º) y, evidentemente los momentos totales se conservan.

Si el choque es en dos dimensiones:
Antes del choque cada uno de los cuerpos posee una velocidad constante y por tanto cada uno posee un momento lineal constante y, por cierto, un momento angular constante de acuerdo con el ejercicio 3. En este caso particular, normalmente, se considera como punto de choque el origen del sistema de coordenadas, en cuyo caso las posiciones vuelven a ser colineales con los momentos lineales y, en consecuencia, sus respectivos momentos angulares serán ceros.
Ahora si el origen no está en el punto mas adecuado podemos usar velocidades relativas:

$$\vec{L}_1 + \vec{L}_2 = \vec{r}_1 \, x \, \vec{p}_1 + \vec{r}_2 \, x \, \vec{p}_2 .$$

Usando el CM como punto de referencia extra. La velocidad del CM es constantes antes y después del choque; sea V esa velocidad y M (= m1 +m2) su masa asociada. Aplicando las transformaciones de Galileo a la igualdad anterior y llamando con prima los vectores respecto del sistema centrado en el CM,

$$\vec{L}_1 + \vec{L}_2 = (\vec{r}'_1 + \vec{R}) x (\vec{p}'_1 + m_1 \vec{V}) + (\vec{r}'_2 + \vec{R}) x (\vec{p}'_2 + m_2 \vec{V})$$
$$= (\vec{r}'_1 \, x \, \vec{p}'_1 + \vec{r}'_2 \, x \, \vec{p}'_2) + \vec{R} \, x \, \vec{p}'_1 + \vec{R} \, x \, \vec{p}'_2 + \vec{R} \, x \, m_1 \vec{V} + \vec{R} \, x m_2 \vec{V} + \vec{r}'_1 \, x \, m_1 \vec{V} + \vec{r}'_2 \, x m_2 \vec{V}$$

el primer paréntesis es nulo pues en el CM posición y velocidad son colineales, luego queda

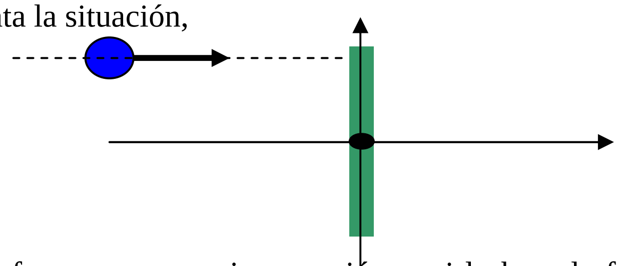
$$= \vec{R} \, x (\vec{p}'_1 + \vec{p}'_2) + \vec{R} \, x \, (m_1 + m_2) \vec{V} + (\vec{r}'_1 \, m_1 + \vec{r}'_2 \, m_2) x \vec{V}$$

el primer paréntesis es nulo, pues representa el momento lineal total respecto del CM, el cual es nulo. El tercer paréntesis es el numerador del vector posición respecto del CM, nulo también. La suma de las masas por la velocidad del CM es es momento lineal total del sistema, que es constante; luego

$$\vec{L}_{total} = \vec{R} \, x \, \vec{P}$$

y como el CM se mueve con velocidad constante su momento lineal lo es y, de acuerdo al ejercicio 3, el momento lineal total es constante.

5.- Un proyectil de masa m y velocidad $v_x = v_o$ choca con el extremo de una barra que está en posición vertical respecto de la superficie de la tierra, la barra posee largo 2L y masa M e, inicialmente, está en reposo sobre el eje y con su centro en el origen del sistema de referencia.. El proyectil queda pegado a la barra. Determine,
a.- velocidad angular de la barra justo después del choque.
b.- Suponga que no hay roce en el eje de giro, ¿alcanza la barra a dar una vuelta completa?
Solución.
a.- La figura representa la situación,



Durante el choque la fuerza peso no ejerce acción, y si lo hace la fuerza interna en el lugar de impacto es mucho más influyente que el peso de la bala. El peso de la barra tampoco interesa en el momento del choque pues no hace torque en esa posición. Por tanto el momento angular del sistema debe conservarse.
Respecto del origen de coordenadas,

$$L_z = \text{constante}$$
$$L\, m\, v_o = I\omega$$

con $I = m L^2 + M(2L)^2/12$. Por tanto

$$\omega = m\, v_o /[\, L\, (m + M/3)]$$

y la barra girará en sentido horario. La velocidad angular apunta en el sentido negativo del eje z.
La energía mecánica del sistema antes de la interacción, y usando el mismo sistema de referencia, es

$$E = mg\, L + mv_o^2 / 2.$$

En cambio, justo después del choque es

$$E' = mgL + (1/2)I\omega^2 ,$$

reemplazando el I y el ω antes determinado debe resultar

$$E' = mgL + (1/2)m^2 v_o^2 / [m + M/3]$$

en donde se ve claramente que la energía final es menor que la energía que poseía el sistema antes de la interacción. Notar que es la energía cinética la que no se conserva.

b.- La energía adquirida producto del choque es mas que suficiente para que el sistema de una vuelta completa.

$$mgL + (1/2)I\omega_o^2 = mgL + (1/2)I\omega'^2$$

de donde se ve que la velocidad con que llega de nuevo al punto de partida es exactamente la misma con que comenzó su movimiento.

6.- Una plataforma giratoria posee un momento de inercia 300 kg m^2, radio 3 m y gira a 15 rad/s en sentido anti horario. Una persona de 50 kg de masa salta al borde de la plataforma.

a.- determine la nueva velocidad de la plataforma.

b.- la persona ahora se mueve por el borde la plataforma y en sentido anti horario con una velocidad de 6 m/s respecto de un observador ubicado fuera de la plataforma. Determine el sentido de giro de la plataforma y su velocidad angular.

Solución.

a.- Suponiendo que la persona cae sobre la plataforma en un plano vertical, entonces no hay torque efectivo sobre el sistema y el momento angular debe conservarse,

$$I_o\omega_o = I'\omega'$$

$$300 \times 15 = 750 \times \omega'$$

de donde

$$\omega' = 6 \text{ rad/s} \text{ y en sentido anti horario.}$$

b.- La persona camina con una cierta velocidad angular pero está dentro del sistema, luego el momento angular total antes de caminar es el mismo mientras camina. Esto significa que se puede escribir,

$$(Lz)_{\text{antes}} = (Lz)_{\text{después}}$$

$$I'\omega' = (L''z)_{\text{plat.}} + (L''z)_{\text{pers.}}$$

$$4500 \text{ kgm}^2/\text{s} = (L''z)_{\text{plat}} + 450 \times 2 \text{ kg m}^2/\text{s}$$

en esta expresión el 4500 es el momento total, el 450 el momento de inercia de la persona respecto del eje de giro y el 2 es la velocidad angular de la persona respecto de un observador ubicado fuera de la plataforma. El momento angular de la persona es positivo porque gira en forma antihoraria. Despejando

$$(L''z)_{\text{plat}} = 3600 \text{ kg m}^2/\text{s}.$$

Luego la plataforma gira con velocidad angular de 12 rad / s y en sentido antihorario.

Si la velocidad de la persona fuese de 30 m/s la plataforma se detiene y si la velocidad de la persona es más de 30 m/s la plataforma gira en sentido opuesto.

Nota. Errores comunicarlos a jmorales@udec.cl