

## Tarea 1: Análisis Real I

De los siguientes ejercicios **escoja sólo dos de ellos**. En el caso de contestar más de dos, se considerarán aquellos con mejor puntaje.

1) Sean  $X, Y \neq \emptyset$  y  $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$  acotada. Demuestre que:

$$\sup_{y \in Y} \left( \inf_{x \in X} f(x, y) \right) \leq \inf_{x \in X} \left( \sup_{y \in Y} f(x, y) \right).$$

Realice observaciones al aplicar el resultado a la función  $f : [0, 1] \times ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  definida por:

$$f(x, y) = \sqrt{x}e^{-y}$$

2) Sea  $(X, d)$  espacio métrico y  $\{A_k\}_{k=1}^n \subseteq X$ . Demuestre que:

- a) Si  $A = \bigcup_{k=1}^n A_k$ , entonces  $\bar{A} = \bigcup_{k=1}^n \bar{A}_k$
- b) Si  $B = \bigcap_{k=1}^n A_k$ , entonces  $\text{int}(B) = \bigcap_{k=1}^n \text{int}(A_k)$

3) Sea  $(X, d)$  espacio métrico. Demuestre que:

a) Si  $A, B \subseteq X$  son abiertos, entonces  $A \times B$  es abierto.

Hint: use la métrica  $\tilde{d} : X^2 \times X^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\tilde{d}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{d^2(x_1, x_2)^2 + d^2(y_1, y_2)}$ .

b) Si  $A \times B$  es compacto, entonces  $A$  y  $B$  son compactos.

Hint: use el inciso a)

■ **Fecha de Entrega: Viernes, 20 de Abril de 2018**

■ **Formato de Entrega:** Las tareas deben ser redactadas en  $\text{\LaTeX}$  y enviadas al correo [sercarrasco@udec.cl](mailto:sercarrasco@udec.cl), con copia a [jmanriquezr@udec.cl](mailto:jmanriquezr@udec.cl). Además, una copia impresa debe ser entregada a cualquiera de los ayudantes antes de la fecha límite.

■ Por entregas fuera de plazo se descuentan  $\sum_{k=1}^n 2^k$  décimas, con  $n$  el número de días de atraso.

■ Se descontará puntaje por reiterados errores de redacción, prestar atención a eso.

**¡Que les vaya bien! :D**