UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Ayudantía 5 - Análisis Real I (525301)

Ejercicio 5.1. Sea (X, d) un espacio métrico y $p \in X$. Para $\delta > 0$ fijo, se definen los conjuntos

$$A := \{q \in X : d(p, q) < \delta\}$$
$$B := \{q \in X : d(p, q) > \delta\}$$

Demuestre que A y B son conjuntos separados. Utilice ésto para concluir que todo espacio métrico conexo con al menos dos puntos es no numerable.

Ejercicio 5.2. Sean A y B conjuntos separados de $\mathbb{R}^n$. Suponga que $\boldsymbol{a} \in A$ y $\boldsymbol{b} \in B$, para los cuales se define

$$p(t) = (1 - t)\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b} \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

Demuestre que $p^{-1}(A)$ y $p^{-1}(B)$ son conjuntos separados. Además, demuestre que existe $t_0 \in (0, 1)$ tal que $p(t_0) \notin A \cup B$. Utilice ésto para concluir que todo subconjunto convexo de $\mathbb{R}^n$ es conexo.

Ejercicio 5.3. Un espacio métrico se dice *s*eparable si contiene un subconjunto denso numerable. Demuestre que $\mathbb{R}^n$ es separable.
`Hint: Los racionales son densos en los números reales.`

Ejercicio 5.4. Sea (X, d) un espacio métrico. Una familia $\{B_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ de subconjuntos abiertos de X se dice una *base de* X si para todo $x \in X$ y toda vecindad G de x, se verifica que existe $\lambda \in \Lambda$ tal que $x \in V_\lambda \subseteq G$. En otras palabras, todo conjunto abierto es la unión de elementos de la base.

Demuestre que X es un espacio métrico separable si y sólo si tiene una base numerable.
`Hint: Considere las bolas de radio racional y centro en un conjunto denso numerable.`

Ejercicio 5.5. Sea (K, d) un espacio métrico compacto. Demuestre que K es separable.
`Hint: Utilice el Ejercicio 5.4 y que los conjuntos compactos son totalmente acotados.`

Ejercicio 5.6. Demuestre que todo conjunto abierto en $\mathbb{R}$ es la unión (a lo sumo) numerable de intervalos disjuntos.

Concepción, April 20, 2018
RRA/SCH/JMR/jmr