UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Ayudantía 3 - Análisis Real I (525301)

1. Problemas Discutidos

1.1. Problema TP2-E4.

1.1.1. *Si* $\{G_\alpha\}_{\alpha\in A}$ *es una familia de conjuntos abiertos, entonces* $\bigcup_{\alpha\in A} G_\alpha$ *es un conjunto abierto.*

Demostración. Sea $p \in \bigcup_{\alpha\in A} G_\alpha$. Entonces debe existir $\alpha_0 \in A$ tal que $p \in G_{\alpha_0}$. Dado que G_{α_0} es abierto por hipótesis, entonces $\exists r > 0$ tal que $B_r(p) \subset G_{\alpha_0} \subset \bigcup_{\alpha\in A} G_\alpha$ ■

1.1.2. *Si* $G_1, \ldots, G_N$ *son conjuntos abiertos, entonces* $\bigcap_{i=1}^{N} G_i$ *es un conjunto abierto.*

Demostración. Sea $p \in \bigcap_{i=1}^{N} G_i$. Esto implica que $p \in G_1, \ldots, p \in G_N$, de lo que se sigue que deben existir $r_1, \ldots, r_N > 0$ tales que $B_{r_1}(p) \subset G_1, \ldots, B_{r_N}(p) \subset G_N$. Sabiendo que para bolas abiertas se cumple:

$$B_{r_0}(p) \subset X \Rightarrow \forall 0 < r < r_0 \,:\, B_r(p) \subset X$$

Tomamos $r := \inf\{r_1, \ldots, r_N\} > 0$ (que, dado un conjunto finito, sabemos que verifica ser el mínimo también). Luego, $\exists r > 0 \,:\, B_r(p) \subset G_1, \ldots B_r(p) \subset G_N \Rightarrow B_r(p) \subset \bigcap_{i=1}^{N} G_i$ ■

1.2. Problema TP2-E5.

1.2.1. $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left[\frac{1}{n}, 1\right] = (0, 1]$ *y por lo tanto no es un conjunto cerrado.*

Demostración. La inclusión $\subset$ es trivial (términos positivos). En el otro sentido, tomemos un elemento $x \in (0, 1]$, por lo tanto se verifica que $0 < x \leq 1$. Por la propiedad arquimediana, sabemos que $\forall x > 0, \exists n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < x$. De esa manera encontramos n tal que $\frac{1}{n} < x \leq 1 \Leftrightarrow x \in \left[\frac{1}{n}, 1\right] \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left[\frac{1}{n}, 1\right]$. ■

1.2.2. $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(-1, \frac{1}{n}\right) = (-1, 0]$ *y por lo tanto no es un conjunto abierto.*

Demostración. La inclusión $\supset$ es trivial. En el otro sentido, tomemos un elemento $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(-1, \frac{1}{n}\right)$, por lo tanto $\forall n \in N$, se tiene $-1 < x < \frac{1}{n}$. Por propiedad arquimediana sabemos que $\nexists x > 0$ tal que $x < \frac{1}{n} \Leftrightarrow n < \frac{1}{x}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Luego, se debe tener que $-1 < x \leq 0 \Rightarrow x \in (-1, 0]$. ■

1.2.3. $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(0, \frac{1}{n}\right) = \emptyset$.

Demostración. Supongamos, por contradicción, que existe un elemento $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(0, \frac{1}{n}\right)$. Luego, $0 < x < \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}$. Por propiedad arquimediana, ésto no se puede tener. Por tanto, el conjunto es vacío. ■

1.3. Problema TP2-E6.

1.3.1. *Demuestra que int(X) es el mayor conjunto abierto contenido en X.*

Demostración. Sea $A \subset X$ abierto, queremos demostrar que necesariamente $A \subset \text{int}(X)$.

Dado que A es abierto, entonces para todo $x \in A$ existe $r > 0$ con el cual se tiene $B_r(x) \subset A \subset X$. Por lo tanto x es punto interior de X, de lo que se sigue que pertenece al interior de X. En otras palabras, $x \in A \Rightarrow x \in \text{int}(X)$ ■

1.4. Problema TP2-E7.

1.4.1. *Demuestra que todo conjunto abierto es unión de bolas abiertas.*

Demostración. Sea X un conjunto no vacío y abierto. Luego, $\forall p_i \in X$ se tendrá que existe $r_i > 0$ tal que $B_{r_i}(p_i) \subset X$. De aquí se sigue que $\bigcup_{i\in I} B_{r_i}(p_i) \subset X$. Dado que toda bola contiene su propio centro, es fácil ver que $X \subset \bigcup_{i\in I} B_{r_i}(p_i)$. ■

1.5. Problema TP2-E8.

1.5.1. $\{a\}$ *es cerrado.*

Demostración. Como $\{a\}$ es un conjunto finito, se tiene inmediatamente que es cerrado (basta analizar que $\{a\}' = \emptyset \subset \{a\}$). ■

1.5.2. $\{a\}$ *es abierto si y sólo si a es un punto aislado.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Si $\{a\}$ es abierto, entonces se tiene la bola centrada en a contenida en $\{a\}$. Como esta bola no puede ser vacía (ya que contiene a a), se tiene que $B_r(a) = \{a\}$. Luego, $B_r(a) \cap \{a\} = \{a\}$. Por lo tanto, a es punto aislado.

($\Leftarrow$) Sea a un punto aislado. Por lo tanto $\exists r > 0 : B_r(a) \cap \{a\} = \{a\}$. Como intersectar una bola con su centro es redundante, tenemos que $B_r(a) = \{a\}$. A su vez, como todo conjunto es subconjunto de sí mismo, hemos encontrado una bola abierta para cada elemento de $\{a\}$ que está contenida en el conjunto. ■

1.6. Problema TP2-E9.

1.6.1. $E = int(X) \dot\cup \partial X \dot\cup int(X^c)$.

Demostración. Ver que los tres conjuntos son disjuntos es trivial (mirando sus definiciones). La inclusión $\supset$ es trivial ya que dado todos los puntos a analizar están en E.

Sea $p \in E$. Tomemos el caso $p \in X$ (el caso $p \in X^c$ se analiza de manera análoga, además notando que $\partial X = \partial X^c$). En este caso, puede darse que exista o no $r > 0$ tal que $B_r(x) \subset X$. En ese caso, $x \in \text{int}(X)$. En caso contrario, se tendrá la negación de lo anterior, id est $\forall r > 0 : B_r(x) \not\subseteq X$, lo que implica $B_r(x) \cap X^c \neq \emptyset$. Por lo tanto, verificando rápidamente que la intersección de cualquier bola centrada en $x \in X$ con X es no vacía, tendremos que $x \in \partial X$. ■

1.6.2. $\overline{X} = int(X) \cup \partial X$.

Demostración. Tomando $\overline{X} = \{x \in E : \forall r > 0,\ B_r(x) \cap X \neq \emptyset\}$, notamos que $\forall x \in \overline{X}$, se pueden dar dos casos: $x \in X \vee x \in X^c$. Si $x \in X^c$, se tendrá entonces que $x \in \partial X$. Si $x \in X$ se puede dar el caso que exista $r > 0$ para $B_r(x) \subset X$. Si se da, entonces $x \in \operatorname{int}(X)$, si se da lo contrario, entonces $x \in \partial X$, ya que no hay r para inducir una bola contenida en X ($B_r(X) \cap X^c \neq \emptyset$). Por lo tanto, $\overline{X} \subset \operatorname{int}(X) \cup \partial X$.

En el otro sentido, $\forall x \in \operatorname{int}(X) \cup \partial X$ se tiene que $\forall r > 0$, $B_r(x) \cap X \neq \emptyset$, ya que si está en el interior, entonces pertenece a X (intersección x), y si está en la frontera, entonces por definición se tiene la intersección no nula. Por lo tanto $\overline{X} \supset \operatorname{int}(X) \cup \partial X$. ■

1.6.3. *∂X es un conjunto cerrado.*

Demostración. Del ejercicio (a) sabemos que $(\partial X)^c$ es la unión de dos conjuntos abiertos (interiores). Por lo tanto, $(\partial X)^c$ es abierto y su complemento es cerrado. ■

1.7. **Problema TP2-E10.**

1.7.1. *si $X \subset Y$, entonces $diam(X) \leq diam(Y)$.*

Demostración. Como X es subconjunto de Y, tendremos entonces que $\forall x, y \in X \Rightarrow x, y \in Y$. Por lo tanto, si definimos los conjuntos $D_x := \{d(x,y) : x, y \in X\}$ y $D_y := \{d(a,b) : a, b \in Y\}$, tendremos necesariamente que $D_x \subset D_y$. Supongamos que $\operatorname{diam}(X) > \operatorname{diam}(Y)$. Esto es equivalente a decir $\sup D_x > \sup D_y$, lo que sabemos que lleva a una contradicción (rápidamente por inspección notamos que $\sup D_y$ acota a D_x, generando una cota menor al supremo). ■

1.7.2. *si $X \cap Y \neq \emptyset$, entonces $diam(X \cup Y) \leq diam(X) + diam(Y)$.*

Demostración. Sea $p \in X \cap Y$. Luego, $\forall x \in X, \forall y \in Y$ se cumple $d(p,x) \leq \operatorname{diam}(X)$ y $d(p,y) \leq \operatorname{diam}(Y)$. Por desigualdad triangular tendremos $\forall x \in X, \forall y \in Y$:

$$\begin{aligned} d(x,y) &\leq d(x,p) + d(p,y) \\ &\leq \operatorname{diam}(X) + \operatorname{diam}(Y) \end{aligned}$$

Luego se tiene que $\operatorname{diam}(X) + \operatorname{diam}(Y)$ es una cota superior para el cojnjunto $D_{xy} := \{d(x,y) : x, y \in X \cup Y\}$. Dado que $\operatorname{diam}(X \cup Y) = \sup D_{xy}$, como menor cota superior tendremos que $\operatorname{diam}(X \cup Y) \leq \operatorname{diam}(X) + \operatorname{diam}(Y)$. ■

1.8. **Problema TP2-E11.**

1.8.1. *Demuestra que todo espacio métrico es unión numerable de conjuntos acotados.*

Demostración. Sea $x \in E$ un punto arbitrario, tomemos las bolas $B_n(x)$ con $n \in \mathbb{N}$. Definamos $U := \bigcup_{n \in N} B_n(x)$. La inclusión $U \subset E$ es trivial. En el otro sentido, notamos que $\forall p \in E$ se tiene que $r_p := d(x,p) \in \mathbb{R}$. Por propiedad arquimediana, se tiene que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > r_p$. Esto implica entonces que $p \in B_n(x) \subset U$. ■

1.9. **Problema TP2-E12.**

1.9.1. *$diam(B_r(a)) \leq 2r$, pero no necesariamente $diam(B_r(a)) = 2r$.*

Demostración. Por desigualdad triangular, $\forall x, y \in B_r(a)$, $d(x,y) \leq d(x,a) + d(a,y) = r + r = 2r$. Para la métrica discreta, se toma una bola de radio 2 y se obtiene diámetro 1. ■

1.9.2. *En un espacio vectorial no trivial normado, diam*$(B_r(a)) = 2r$.

Demostración. Sabemos, del ejercicio anterior, que $\text{diam}(B_r(a)) \leq 2r$. Supongamos que $\text{diam}(B_r(a)) < 2r$. Sea $\hat{u}$ un vector unitario, y sea $\text{diam}(B_r(a)) < d < 2r$. Sean, además, $x = a + \dfrac{d}{2}\hat{u}$ e $y = a - \dfrac{d}{2}\hat{u}$. Verificamos que ambos están en $B_r(a)$.

$$||x - a|| = \frac{d}{2} < r \qquad ||y - a|| = \frac{d}{2} < r$$

Sin embargo, notamos que:

$$||x - y|| = ||d\hat{u}|| = d > \text{diam}B_r(a)$$

Lo que es una contradicción. Por lo tanto, $\text{diam}(B_r(a)) = 2r$. ■

2. Problemas Propuestos

2.1. **Problema Propuesto 1.** Un espacio metrico X es separable si tiene un subconjunto denso numerable. Demostrar que $\mathbb{R}^k$ es separable.

2.2. **Problema Propuesto 2.** Demostrar que cualquier conjunto abierto de $\mathbb{R}$ es la unión de una cantidad a lo más numerable de intervalos abiertos disjuntos.

2.3. **Problema Propuesto 3.** Consideremos el conjunto $\mathbb{Z}$ y p un numero primo, definimos el valor absoluto p-adico como sigue $|a|_p = \frac{1}{p^n}$ donde n es la máxima potencia de p que divide a a, es decir, p^n divide a a y p^{n+1} no divide a a. Si $a = 0$, entonces $|0|_p = 0$. Demostrar que si definimos $d_p := |x - y|_p$ entonces $(\mathbb{Z}, d_p)$ es un espacio metrico.

Concepción, April 5, 2018
JMR