UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Ayudantía 2 - Análisis Real I (525301)

Problema 2.1. Sea $K := \{s + t\sqrt{2} \mid s, t \in \mathbb{Q}\}$. Demuestre que K verifica:

(a) Si $x_1, x_2 \in K$, entonces $x_1 + x_2 \in K$ y $x_1 x_2 \in K$.
(b) Si $x \neq 0$ y $x \in K$, entonces $x^{-1} \in K$.

Por tanto, el conjunto K es un subcuerpo de $\mathbb{R}$. Con el orden heredado de $\mathbb{R}$, el conjunto K es un cuerpo ordenado entre $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$.

Problema 2.2. Sean $s, t \in \mathbb{R}$. Demuestre las siguientes identidades

(a) $\min\{s,t\} = \dfrac{s+t-|s-t|}{2}$
(b) $\max\{s,t\} = \dfrac{s+t-|s-t|}{2}$

Observación: A veces, en la literatura, $\min\{s,t\}$ y $\max\{s,t\}$ son escritos como $s \wedge t$ y $s \vee t$ respectivamente.

Problema 2.3. Sea p un número primo y $n \in \mathbb{N}$. Demuestre que si n^2 es divisible por p, entonces n es divisible por p.

Problema 2.4. Demuestre que $\sqrt{5}$ es un número irracional.

Problema 2.5. Ejercicio 5, T.P. 1 Adicional

Problema 2.6. Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}$ conjuntos acotados. Demuestre que $A \cup B$ es un conjunto acotado, y que $\sup(A \cup B) = \sup\{\sup A, \sup B\}$.

Problema 2.7. Sea $S \subseteq \mathbb{R}$. Suponga que $s^* := \sup S$ pertenece a S. Si $u \notin S$, demuestre que $\sup(S \cup \{u\}) = \sup\{s^*, u\}$.

Problema 2.8. Demuestre que un conjunto finito no vacío $S \subseteq \mathbb{R}$ contiene a su supremo.

Problema 2.9. Sea $y > 0$. Demuestre que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1}{2^n} < y$.

Problema 2.10. Calcule el supremo y el ínfimo de los siguientes conjuntos:

(a) $A := \left\{1 - \dfrac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$
(b) $B := \left\{\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{m} \mid m, n \in \mathbb{N}\right\}$

Concepción, March 23, 2018
RRA/SCH/JMR/jmr