UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

RESUMEN I — PROCESOS ESTOCÁSTICOS

JAIME R. MANRÍQUEZ

Contenidos

1. Conceptos básicos de probabilidad

En adelante $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ es un espacio de probabilidad, donde

- Ω es el conjunto denominado espacio muestral. Los elementos $\omega \in \Omega$ se denominan sucesos elementales.
- $\mathcal{F}$ es una σ-álgebra sobre Ω denominada conjunto de sucesos aleatorios.
- $P : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ es una medida real, con $P(\Omega) = 1$.

Ejemplo 1.1. Para el lanzamiento de una moneda, se tiene $\omega_1 =$ "cara" y $\omega_2 =$ "sello". Luego $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$, $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \{\omega_1, \omega_2\}\}$.

Definición 1.1. Sea $B \subseteq \Omega$, con $P(B) > 0$. Para $A \subseteq \Omega$, se denomina *probabilidad condicional* dado B (o condicionada de A dado B) a

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \tag{1.1}$$

Definición 1.2. Dos sucesos A y B se dicen *independientes* si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Notar que de la Definición 1.1 se tiene que A y B son independientes si y sólo si $P(A|B) = P(A)$. En tal caso se escribe $A \perp\!\!\!\perp B$.

Teorema 1.1 (Probabilidad Compuesta)**.** *Sea* $\{A_i\}_{i=1}^n \subseteq \Omega$. *Entonces*

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = \prod_{i=1}^n P\left(A_i \setminus \bigcap_{j=1}^{i-1} A_i\right) \tag{1.2}$$

Teorema 1.2 (Probabilidad Total)**.** *Sea* $\{A_i\}_{i=1}^n \subseteq \Omega$ *tal que* $\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$ *tal que* $i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$. *Entonces*

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(B \setminus A_i)P(A_i), \qquad \forall B \subseteq \Omega \tag{1.3}$$

Definición 1.3. Una *variable aleatoria real* (v.a) X es una función medible de una variable en $(\Omega, \mathcal{F})$ asociada a un experimento aleatorio. Es decir, $X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ tal que $\forall B \in \mathcal{B}$, $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$.

2. Clasificación de Procesos Estocásticos

Definición 2.1. Dado $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ de modo que $\forall t \in T$, la función $X_t : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ es una variable aleatoria y $\forall \omega \in \Omega$, $X_\bullet(\omega) : T \to \mathbb{R}$ es una función de t, se dice que $X = \{X_t : \ t \in T\}$ es un *proceso estocástico.*

Observación 2.1. Al fijar t se obtiene una v.a. con una cierta distribución. Por otro lado, al fijar ω (es decir, alguna configuración que tome cada X_t) se obtienen las llamadas *trayectorias.*

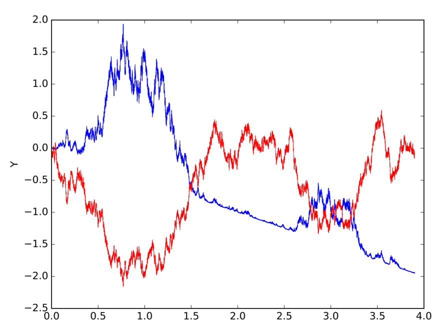


Figure 2.1. Trayectorias para un proceso de Wiener

Notar que, de la definición anterior, un proceso estocástico corresponde a una función de dos variables, en contraste a una variable aleatoria que es una función de una variable.

El conjunto T se denomina conjunto (o espacio) paramétrico. Puede ser continuo o numerable.

Ejemplo 2.1.

(1) Si $T = \{t_0\}$, X_{t_0} es una v.a.
(2) Si $T = \{t_1, \ldots, t_n\}$, X es un vector aleatorio.
(3) Si $T = \mathbb{N}$, X es una sucesión de variables aleatorias.
(4) Si $T = (a, b] \subseteq \mathbb{R}$, X es un proceso estocástico de tipo continuo.

Definición 2.2. Se denomina conjunto de estados E al conjunto de los posibles valores que pueden tomar las v.a. $\{X_t : \ t \in T\}$.

Ejemplo 2.2. Sea X_t: número de personas que esperan locomoción en un paradero en el instante $t \in [8, 10]$. En este caso, $E = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

Ejemplo 2.3 (Evolución de un juego)**.** Se lanza una moneda varias veces. Si sale cara (c), se gana un peso. Si sale sello (s), se pierde un peso.

Sea X_n: número de pesos que quedan luego de n lanzamientos. Así, $\Omega := \{n\text{-uplas de } c \text{ y } s\}$. Por tanto, $|\Omega| = 2^n$ y $\mathcal{F} = 2^\Omega$. Si la moneda es simétrica, $P(c) = P(s) = 0.5$.

En este caso, $T = \{1, 2, \ldots\}$ y $E = \{\ldots, -1, 0, 1, \ldots\}$. Para $n = 3$, se tiene que $E_3 = \{-3, -1, 1, 3\}$.

Es fácil ver que $P(X_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^k$. Por tanto $X_n \sim \text{Bin}(n, 0.5)$. Este proceso se conoce como *Proceso de Bernoulli.*

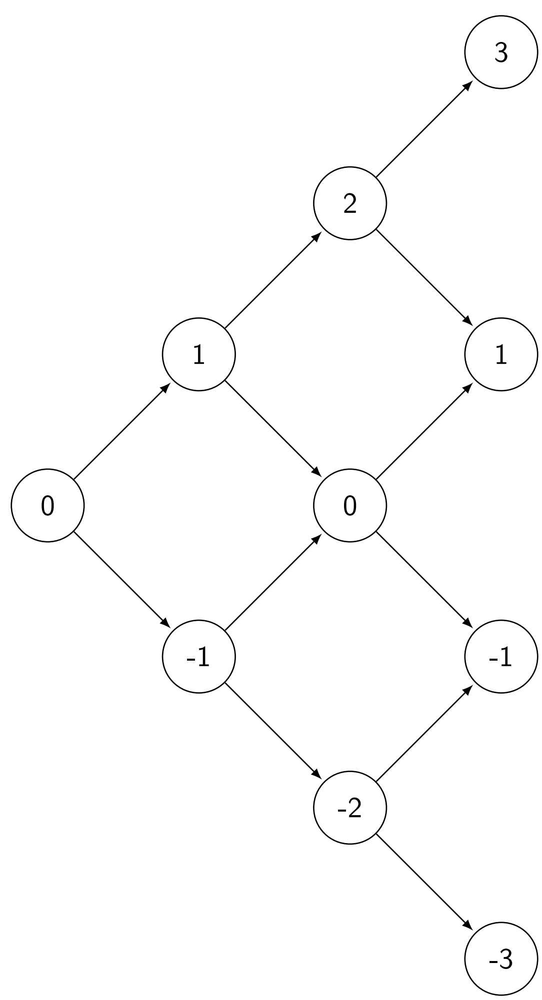


FIGURE 2.2. Proceso de Bernoulli

Los procesos estocásticos según la estructura del conjunto paramétrico T y del conjunto de estados E, o según las características probabilistas de las v.a. $\{X_t :\ t \in T\}$.

2.1. **Clasificación según la estructura de T y E.**

$E \backslash T$	**Discreto**	**Continuo**
Discreto	Cadenas	Proceso Puntual
Continuo	Sucesión de v.a.	Proceso Continuo

Ejemplo 2.4.

(1) Sea X_t: cantidad de autos en un estacionamiento al comenzar una hora. (Cadena)
(2) Sea X_t: número de personas esperando en el paradero en un instante t (proceso puntual o de saltos puros).
(3) Sea X_n: cantidad de petróleo extraído en el n-ésimo mes (sucesión de v.a.)
(4) Sea X_t: tiempo de espera de un cliente al llegar a un banco (proceso continuo)

Observación 2.2. Estas clasificaciones anteriores son mutuamente excluyentes. Sin embargo, las siguientes formas de clasificación no lo son.

2.2. **Clasificación con respecto a las características probabilistas.**

2.2.1. *Procesos de Incrementos Independientes.*

Definición 2.3. Sea $T = [0, +\infty)$ o $T = \mathbb{N}_0$. Se dice que un proceso $\{X_t : t \in T\}$ es de incrementos independientes si $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t_0 = 0, t_1, \ldots, t_n \in T$, con $t_0 < t_1 < \ldots < t_n$, las v.a. $X_{t_0}, (X_{t_1} - X_{t_0}), \ldots, (X_{t_n} - X_{t_{n-1}})$ son independientes.

Ejemplo 2.5. Sean $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n$ v.a. independientes. Definamos $X_n = \sum_{i=0}^{n} \xi_i$. De aquí es fácil ver que $X_i - X_{i-1} = \xi_i$, por lo que $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ es un proceso de incrementos independientes.

Considerando el proceso del ejemplo anterior, ¿son $X_{t_2} - X_{t_0}$ y X_{t_1} independientes?

$$\begin{aligned} X_{t_2} - X_{t_0} &= \underline{\xi_1} + \xi_2 \\ X_{t_1} &= \xi_0 + \underline{\xi_1} \end{aligned}$$

Como ambas variables dependen de ξ_1, **NO** son independientes. En general, si $\operatorname{sop} X_i \cap \operatorname{sop} X_j \neq \emptyset$, entonces X_i y X_j no son independientes.

Otro ejemplo de proceso de incrementos independientes es el Proceso de Wiener (Mov. Browniano) y los modelos de valoración de opciones (Modelo de Black-Scholes).

Definición 2.4. Consideramos un proceso estocástico $\{W_t, t \in T\}$, con $T = [0, +\infty]$ tal que

a) $W_0 = a$ (constante). Usualmente $a = 0$.
b) $\forall s < t$, los incrementos $W_t - W_s$ son independientes y satisfacen
   - $\mathbb{E}(W_t - W_s) = 0$
   - $\mathbb{E}(W_t - W_s)^2 = t - s$

El proceso anterior se denomina *Proceso de Wiener.*

Observación 2.3. Las trayectorias del proceso de Wiener son casi seguramente continuas, pero no son derivables en ningún punto.

Observación 2.4. Por el Teorema del Límite Central, de la definición anterior tenemos que $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$. Es decir, los procesos de Wiener se distribuyen como una variable Gaussiana.

Por tanto, $f_{W_t}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{u^2}{2t}\right)$, si $W_0 = 0$. Además, $f_{W_t - W_s}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp\left(-\frac{u^2}{2(t-s)}\right)$.

Teorema 2.1 (T.L.C. de Lévy)**.** *Sean $\xi_1, \xi_2, \ldots$ v.a. identicamente distribuidas (i.i.d.) con $\mathbb{E}(\xi_k) = a$ y $0 < \operatorname{Var}(\xi_k) < +\infty$. Entonces, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$,*

$$
(2.1) \qquad P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\xi_i - na}{\sqrt{\operatorname{Var}(\sum_{i=1}^{n}\xi_i)}} < \lambda\right) \xrightarrow{n\to+\infty} \Phi(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\lambda}\exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)du
$$

Definición 2.5 (Definición alternativa de Proc. de Wiener)**.** Un proceso $\{W_t, t \in T\}$ se denomina Proceso de Wiener si verifica las siguientes propiedades

(1) $W_0 = 0$ c.s.
(2) W_t son c.s. continuas
(3) W_t tiene incrementos independientes
(4) $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$, $s < t$

Ejemplo 2.6. Sea $\{W_t, t \geq 0\}$ un proceso de Wiener, definido según la Definición 2.4. Muestre que $\operatorname{Cov}(W_t, W_s) = t \wedge s$ y $\operatorname{Corr}(W_t, W_s) = \sqrt{\frac{s \wedge t}{s \vee t}}$.

Solución. Sin pérdida de generalidad, supongamos $s < t$. Así,

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Cov}(W_t, W_s) &= \mathbb{E}\left[(W_t - \mathbb{E}\, W_t)(W_s - \mathbb{E}\, W_s)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[W_t W_s\right]
\end{aligned}
$$

Considerando $W_t = (W_t - W_s) + W_s$, con $(W_t - W_s) \perp\!\!\!\perp W_s$, se tiene

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[W_t W_s\right] &= \mathbb{E}\left[((W_t - W_s) + W_s)W_s\right] \\
&= \mathbb{E}\left[(W_t - W_s)W_s\right] + \mathbb{E}\left[W_s^2\right] \\
&= \underbrace{\mathbb{E}[(W_t - W_s)]}_{0}\,\mathbb{E}[W_s] + \mathbb{E}[W_s^2] \\
&= \mathbb{E}[(W_s - W_0)^2] \\
&= s
\end{aligned}
$$

Por otro lado,

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Corr}(W_t, W_s) &= \frac{\operatorname{Cov}(W_t, W_s)}{\sqrt{\operatorname{Var}(W_t)\operatorname{Var}(W_s)}} \\
&= \frac{s}{\sqrt{ts}} \\
&= \sqrt{\frac{s}{t}}
\end{aligned}
$$

2.2.2. *Proceso Gaussiano.*

Definición 2.6. Se dice que $\{X_t : t > 0\}$ es un proceso Gaussiano si todo vector aleatorio del tipo $(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n})$ tiene distribución normal n-variante. Es decir,

$$
(2.2) \qquad f(\boldsymbol{x}) = \frac{2}{(2\pi)^{n/2}|\Sigma|^{1/2}}\exp\left(\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\mu)^T\Sigma^{-1}(\boldsymbol{x}-\mu)\right)
$$

donde $\mu^T = \mathbb{E}(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}) = (\mu_1, \ldots, \mu_n)^T$, con $\mu_k = \mathbb{E}(X_{t_k})$ y $\Sigma = (\Sigma_{ij})$, con $\Sigma_{ij} = \mathbb{E}\left[(X_{t_i} - \mu_i)(X_{t_j} - \mu_j)\right]$.

Observación 2.5. Por lo general, si para $\{X_t\}$ e $\{Y_t\}$ procesos estocásticos, se tiene que $\operatorname{Cov}(X_t, X_s) = \operatorname{Cov}(Y_t, Y_s)$, no se puede asegurar nada. Sin embargo, si ambos son Gaussianos, entonces son el mismo proceso.

Teorema 2.2. *Un proceso Gaussiano $\{X_t : t \geq 0\}$ con $\mathbb{E}(X_t) = 0$ y $\operatorname{Cov}(X_t, X_s) = t \wedge s$ es el proceso de Wiener.*

Proof. Es obvio que de lo anterior, $W_0 = 0$ c.s. En efecto, si $\operatorname{Cov}(W_t, W_s) = \mathbb{E}(W_t W_s) = s \wedge t$, entonces $\operatorname{Cov}(W_0, W_0) = \operatorname{Var}(W_0) = 0$ y por tanto, W_0 es una constante. Luego, como $\mathbb{E}(W_0) = 0$, se tiene que $W_0 = 0$.

Además,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(W_t - W_s)^2] &= \operatorname{Var}(W_t) + \operatorname{Var}(W_s) - 2\operatorname{Cov}(W_s, W - t) \\ &= t + s - 2(t \wedge s) \\ &= |t - s|\end{aligned}$$

■

Sea $\{W_t, t \geq 0\}$ un proceso de Wiener. Algunas propiedades son:

1. **Autosimilaridad (o autosimilitud).**
   $\hat{W}(t) = cW\left(\frac{t}{c^2}\right)$, para cada $c \neq 0$ también es un proceso de Wiener.
   Proof. Es fácil de verificar utilizando la segunda definición de Proceso de Wiener. ■
2. **Inversión del tiempo**
   $$\tilde{W}_t = \begin{cases} 0 & t = 0 \\ tW\left(\frac{1}{t}\right) & t > 0 \end{cases}$$
   también es un proceso de Wiener.
   Proof. Es fácil de verificar utilizando la primera definición de Proceso de Wiener. ■

2.2.3. *Proceso de Poisson.*

Definición 2.7. Un proceso de Poisson es un proceso estocástico $\{N_t, t \geq 0\}$ con intensidad (o tasa) $\lambda \geq 0$ tal que sus incrementos $N_t - N_s$, $s < t$ son independientes y se verifica

(1) $N_0 = 0$
(2) $\forall s < t$, $N_t - N_s \sim \text{Poisson}(\lambda(t - s))$

La segunda propiedad quiere decir que

$$P(N_t - N_s = k) = \frac{[\lambda(t-s)]^k}{k!} \exp(-\lambda(t - s)) \tag{2.3}$$

2.2.4. *Procesos de Incrementos Estacionarios.*

Definición 2.8. Sea $T = [0, +\infty]$ o $T = \mathbb{N}$. Se dice que un proceso $\{X_t : t \in T\}$ es de incrementos estacionarios si $\forall t \in T$, la distribución de los incrementos $X_{t+\delta} - X_t$ depende sólo de la longitud δ del intervalo $[t, t + \delta[$ y no depende de t. Esto es,

$$\operatorname{distr}(X_{t+\delta} - X_t) = \operatorname{distr}(X_\delta - X_0)$$

Ejemplo 2.7. Sea $\{X_t : t \in T\}$ un proceso de incrementos estacionarios tal que $\mathbb{E}[X_t] < +\infty$, $\forall t \in T$. Entonces

(1) $\forall t \in T$ $\mathbb{E}[X_t] = m_0 + m_1 t$, donde $m_0 = \mathbb{E}[X_0]$ y $m_1 = \mathbb{E}[X_1 - X_0]$.
(2) Si, además, $\{X_t\}$ es de incrementos independientes, entonces $\forall t \in T$, $\operatorname{Var}(X_t) = \sigma_0^2 + \sigma_1^2 t$, donde $\sigma_0^2 = \operatorname{Var}(X_0)$ y $\sigma_1^2 = \operatorname{Var}(X_1 - X_0)$.

Solución. Definiendo $f(t) := \mathbb{E}[X_t - X_0] = \mathbb{E}[X_t] - m_0$, es fácil verificar que f es una función lineal en t. Luego,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_t] &= f(t) + m_0 \\ &= f(1)t + m_0 \\ &= m_1 t + m_0\end{aligned}$$

La afirmación (2) es análoga al caso anterior.

2.2.5. *Procesos Estacionarios Estrictos.*

Definición 2.9. Sea $T = [0, +\infty)$ o $T = \mathbb{N}$. Un proceso $\{X_t : t \in T\}$ se dice estacionario estricto si $\forall n \in N$, $\forall t_1, \ldots, t_n \in T$, $\forall h \in T$, se verifica

$$\mathrm{distr}(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n}) = \mathrm{distr}(X_{t_1+h}, X_{t_2+h}, \ldots, X_{t_n+h})$$

Ejemplo 2.8. El proceso $\{X_t : t \geq 0\}$ con $X_t = N_{t+\delta} - N_t$, donde $\{N_t, t \geq 0\}$ es un proceso de Poisson, es un proceso estacionario estricto.

Ejemplo 2.9. Sea $X_t = a$, $\forall t \in T$, con a constante. Entonces $\{X_t : t \in T\}$ es un proceso estacionario estricto.

2.2.6. *Procesos Estacionarios en Sentido Débil.*

Definición 2.10. Un proceso $\{X_t : t \in T\}$ tal que $\mathbb{E}[(X_t)^2] < +\infty$ y verifica

(1) $\mathbb{E}[X_t] = m$ (constante)
(2) $\mathrm{Cov}(X_t, X_s) = R(|t-s|)$ (es decir, una función que sólo depende de $|t-s|$)

se dice un proceso estacionario débil (*weakly stationary*).

Observación 2.6. Un proceso estacionario estricto implica estacionario débil. Sin embargo, el recíproco no es cierto en general, salvo cuando el proceso es Gaussiano.

Ejemplo 2.10 (Proceso de Ruido Blanco (AR(0)))**.**

$\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$ es un proceso de ruido blanco si

(1) $\mathbb{E}[\varepsilon_t] = 0$
(2) $\mathrm{Var}[\varepsilon_t] = c$ (constante)
(3) $\mathrm{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+h}) = \mathbb{E}[\varepsilon_t \varepsilon_{t+h}] = 0$ (incrementos no correlacionados)

Así, $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$ es estacionaro débil. Si, además, ε_t son normales, entonces son independientes y el proceso es estacionario estricto.

Ejemplo 2.11 (Proceso Autorregresivo de Orden 1 (AR(1)))**.** Sea $\{\varepsilon_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ el ruido blanco tal que

$$\mathrm{Var}[\varepsilon_n] = \begin{cases} \frac{\sigma^2}{1-\theta^2}, & n = 0 \\ \sigma^2, & n \geq 1 \end{cases}$$

con $\sigma^2 < 1$.

Definamos $X_0 = \varepsilon_0$ y $X_n = \theta X_{n-1} + \varepsilon_n$, $n \geq 1$. Entonces $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ es estacionaro en sentido débil.

Solución. De la definición tenemos que X_n está definida recursivamente, por lo que se puede escribir

$$X_n = \sum_{i=0}^{n} \theta^{n-i} \varepsilon_i$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_t] &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{n} \theta^{n-i} \varepsilon_i\right] \\ &= \sum_{i=0}^{n} \theta^{n-i}\, \mathbb{E}[\varepsilon_i] \\ &= 0\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Cov}(X_n, X_{n+m}) &= \operatorname{Cov}\left(\sum_{i=0}^{n} \theta^{n-i}\varepsilon_i, \sum_{i=0}^{n+m} \theta^{n+m-i}\varepsilon_i\right) \\
(i \neq j \Rightarrow \operatorname{Cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0) \qquad &= \sum_{i=0}^{n} \theta^{n-i}\theta^{n+m-i} \operatorname{Cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_i) \\
&= \theta^n\theta^{n+m} \operatorname{Cov}(\varepsilon_0, \varepsilon_0) + \sum_{i=1}^{n} \theta^{n-i}\theta^{n+m-i} \operatorname{Cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_i) \\
&= \theta^{2n+m}\frac{\sigma^2}{1-\theta^2} + \sigma^2\left(\sum_{i=1}^{n} \theta^{n-i}\theta^{n+m-i}\right) \\
&= \theta^m\sigma^2\theta^{2n}\left(\frac{1}{1-\sigma^2} + \frac{1-\theta^{-2n}}{\theta^2-1}\right) \\
&= \frac{\sigma^2}{1-\theta^2}\theta^m \\
&= R(m)
\end{aligned}
$$

Esto es, la covarianza sólo depende de m (el incremento). Por lo tanto, AR(1) es estacionario débil.

3. Procesos Markovianos

En adelante, consideremos X_n: el estado en el instante de tiempo n y $T = \mathbb{N}$ (tiempo discreto).

Los procesos estocásticos Markovianos tienen la característica que la distribución X_{n+1} sólo depende de la distribución de X_n y no depende de $\{X_{n-1}, X_{n-2}, \ldots\}$ ni del "futuro" $\{X_{n+2}, X_{n+3}, \ldots\}$. En otras palabras:

"El estado futuro del proceso sólo depende del estado presente y no del resto de estados pasados."

o bien,

"Dado el presente, el futuro y el pasado son independientes."

Definición 3.1. $\{X_t : t \in T\}$ es Markoviano (o cumple la propiedad de Markov) si $\forall n \in \mathbb{N}$ y $\forall t_1 < t_2 < \ldots < t_n$, se verifica

$$P\{X_{t_{n+1}} \leq x_{n+1} | X_{t_1} \leq x_1, X_{t_2} \leq x_2, \ldots, X_{t_n} \leq x_n\} = P\{X_{t_{n+1}} \leq x_{n+1} | X_{t_n} \leq x_n\}$$

Ejemplo 3.1. Ejemplos de procesos de Markov son:

- Proceso de Poisson
- Proceso de la señal Telegráfica
- AR(1)

Observación 3.1. Si $E = \mathbb{R}$ (trayectorias c.s. continuas), tal proceso Markoviano se llama *difusión* (proceso de Wiener).

Si E es discreto, de la definición de Markoviano se obtiene

$$P\{X_{t_{n+1}} = x_{n+1} | X_{t_1} = x_1, X_{t_2} = x_2, \ldots, X_{t_n} = x_n\} = P\{X_{t_{n+1}} = x_{n+1} | X_{t_n} = x_n\}$$

Teorema 3.1. *Todo proceso de incrementos estacionarios e independientes es Markoviano.*

Idea de la demostración. Sea $\{X_1, X_2, X_3\}$ de incrementos independientes.

$$
\begin{aligned}
P\left(X_3 = x_3 | X_2 = x_2, X_1 = x_1\right) &= P\left(X_3 - X_2 = x_3 - x_2 | X_2 = x_2, X_2 - X_1 = x_2 - x_1\right) \\
(X_3 - X_2 \text{ y } X_2 - X_1 \text{ son independientes}) \qquad &= P\left(X_3 - X_2 = x_3 - x_2 | X_2 = x_2\right) \\
&= P\left(X_3 = x_3 | X_2 = x_2\right)
\end{aligned}
$$

∎

Ejemplo 3.2. Sea $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ un proceso aleatorio con E discreto.

X_n: estado de un auto y $E = \{x_1, \ldots, x_7\}$, con

x_1: Todo bien
x_2: Existe un problema no identificado
x_3: Se identificó el problema, se está buscando su causa
x_4: Se encontró la causa, se está arreglando
x_5: Chequeo del auto post-reparación
x_6: Revisión técnica
x_7: Pérdida total de vehículo

Hacemos las siguientes suposiciones:

(1) El auto puede estar en sólo uno de los estados $x_1, \ldots, x_7$
(2) $x_1, \ldots, x_7$ son todos posibles

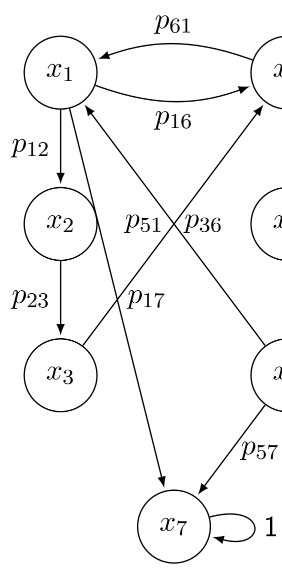


FIGURE 3.1. Grafo para los estados del auto

Definimos $p_i(n) = P(X_n = x_i)$ como la probabilidad de estar en el estado i en el momento n y $p_ij(n) = P(X_n = x_j | X_{n-1} = x_i)$ como la probabilidad de pasar al estado j desde el estado i en el momento n.

Definición 3.2. Los cambios de estado de este tipo de procesos se llaman transiciones. Las probabilidades de cambiar de un estado i a uno j se llaman probabilidades de transición y se denotan $p_{ij}(n)$.

Observación 3.2. En general, $p_{ij}(n) \neq p_{ji}(n)$.

Definición 3.3. Se dice que el proceso $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una Cadena de Markov (en tiempo discreto) si el proceso es Markoviano (i.e. tiene la propiedad de Markov) de tiempo discreto y con espacio de estados discreto.

Por lo tanto,

$$P(X_{n+1} = j | X_1 = k, X_2 = m, \ldots, X_n = i) \overset{Markov}{=} P(X_{n+1} = j | X_n = i) = p_{ij}(n)$$

Definición 3.4. Cuando $p_{ij}(n) = p_ij$ (las probabilidades de transición no dependen del tiempo n), la cadena se denomina *homogénea* (son procesos estacionarios).

Ejemplo 3.3. Sean $X_0, X_1, X_2, \ldots$ v.a. independientes con valores en $\mathbb{Z}$. Entonces $\{X_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ es una cadena de Markov.

Ejemplo 3.4. Sea $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots$ v.a. independientes con valores en $\mathbb{Z}$. Sea $X_n = \sum_{i=0}^{n} \xi_i$. Entonces $\{X_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ es una cadena de Markov, aunque $X_0, X_1, \ldots$ no son independientes.

Observación 3.3. En el caso anterior, si además ξ_i son independientes, entonces la cadena es hommogénea.

Definición 3.5. Sea p_{ij} la probabilidad de transición en una cadena homogénea. Si $p_{ij} > 0$, se dice que el estado x_i comunica con x_j.

En adelante, sea $|E| < +\infty$.

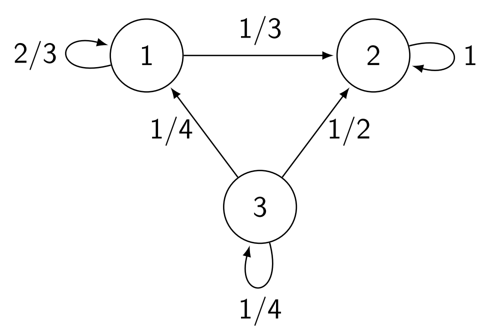
Definición 3.6. La matriz $\mathbb{P} = (p_{ij})$, formada por las probabilidades de transición se denomina matriz de transición (en un paso).

Definición 3.7. Una matriz cuadrada $A = (a_{ij})$ de orden m, tal que $0 \leq a_{ij} \leq 1$ y $\sum_{j=1}^{m} a_i j = 1$, se denomina *matriz estocástica.*

Teorema 3.2. *Cualquier potencia $\mathbb{P}^n$, $n \geq 1$ de una matriz de transición es estocástica.*

Observación 3.4. La matriz $\mathbb{P}^n$ se denomina matriz de transición en n pasos.

Ejemplo 3.5. Una cadena de Markov de 3 estados viene dada por un grafo



Aquí la matriz de transición está dada por

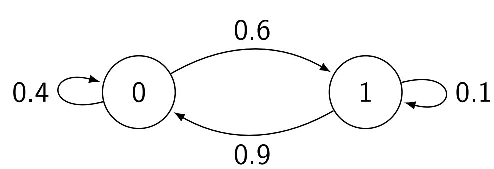
$$\mathbb{P} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix} \end{array}$$

Teorema 3.3. *Una cadena de Markov homogénea está completamente definida por su matriz de transición y la distribución inicial de probabilidades $p_i^{(0)} = P\{X_0 = i\}$, $i = 1, 2, 3, \ldots$*

Ejemplo 3.6. Sea $\{X_n : n \geq 0\}$ una cadena de Markov de dos estados, i.e. $E = \{0, 1\}$ con

$$\mathbb{P} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.9 & 0.1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Ésto puede ser representado gráficamente por



Dada una distribución inicial $p^{(0)} = (0.3, 0.7)$, esto es, $P(X_0 = 0) = 0.3$ y $P(X_0 = 1) = 0.7$, se tiene que

$$\begin{aligned} P(X_1 = 0; X_0 = 0) &= P(X_1 = 0 | X_0 = 0) \cdot P(X_0 = 0) \\ &= p_{00} \cdot p_0^{(0)} = 0.4 \cdot 0.3 = 0.12 \end{aligned} \tag{1}$$

$$(2) \qquad P(X_2=0;X_1=1|X_0=0) = \frac{P(X_2=0;X_1=1;X_0=0)\cdot P(X_1=1;X_0=0)}{P(X_0=0)\cdot P(X_1=1;X_0=0)}$$
$$= P(X_2=0|X_1=1)P(X_1=1|X_0=0)$$
$$= p_{10}\cdot p_{01} = 0.6\cdot 0.9 = 0.36$$

$$(3) \qquad P(X_0=0|X_1=1) = \frac{P(X_0=0;X_1=1)}{P(X_1=1)}$$
$$= \frac{P(X_1=1;X_0=0)}{P(X_1=1)}$$
$$= \frac{P(X_1=1|X_0=0)\cdot P(X_0=0)}{P(X_1=1)}$$
$$= \frac{p_{01}\cdot p_0^{(0)}}{p_1^{(1)}} = 0.72$$

Teorema 3.4. *Dada la distribución inicial $p^{(0)} = (p_0^{(0)}, p_1^{(0)}, \ldots)$, la distribución de probabilidades en el momento k está dada por*

$$p^{(k)} = p^{(0)}\cdot \mathbb{P}^k \tag{3.1}$$

Ejemplo 3.7. Suponga que la probabilidad de que llueva hoy es 0.4 si durante los últimos dos días no llovió y 0.6 si en al menos uno llovió. Sea Y_n el clima en el n-ésimo día, “L” lluvioso y “S” soleado.

¿Es $\{Y_n : n\in\mathbb{N}\}$ una cadena de Markov?

Solución. **NO**, pero $\{X_n = (Y_{n-1}, Y_n)\}$ sí es Markoviano.

Ejemplo 3.8. Para la cadena de Markov identificada en el ejemplo anterior, construya su matriz de transición y calcule la distribución del clima de un Jueves, dado que no llovió Lunes pero sí Martes.

Solución. Definimos los estados $E = \{(SS),(LS),(SL),(LL)\}$. Del enunciado obtenemos que se tiene la siguiente distribución para las configuraciones de tres días:

- SSL — 0.4
- LLL — 0.6
- LSL — 0.6
- SLL — 0.6

Por tanto, la matriz de transición viene dada por:

$$\mathbb{P} = \begin{array}{c} \\ (SS) \\ (LS) \\ (SL) \\ (LL) \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} (SS) & (LS) & (SL) & (LL) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.6 & 0 & 0.4 & 0 \\ 0.4 & 0 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 & 0.6 \\ 0 & 0.4 & 0 & 0.6 \end{pmatrix} \end{array}$$

Dado que llovió Martes, se un estado (SL). Por tanto, tenemos una distribución inicial $p^{(0)} = (0010)$. Al Jueves existen dos pasos, por lo que la distribución de la pareja (Miércoles,Jueves) estará dada por

$$(0010)\cdot \mathbb{P}^2 = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} (SS) & (LS) & (SL) & (LL) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.16 & 0.24 & 0.24 & 0.36 \end{pmatrix} \end{array}$$

Así, la probabilidad de que esté soleado el Jueves es $0.16+0.24 = 0.4$ y que llueva es $0.24+0.36 = 0.6$, acorde a lo esperado por enunciado.

Definición 3.8. Se define la probabilidad de transición en k pasos del estado i al j para una cadena homogénea como

$$\begin{aligned} p_{ij}^{(k)} &= P(X_{n+k} = j | X_n = i) \\ &= P(X_k = j | X_0 = i) \\ &= \sum_{l=1}^{m} P(X_k = j; X_{k-1} = l | X_0 = i) \qquad \forall k \geq 2 \end{aligned}$$

Teorema 3.5 (Teorema de Chapman-Kolmogorov)**.** *Para una cadena homogénea se tiene que*

(1) $p_{ij}^{(n)} = \sum_l p_{il}^{n-k} p_{lj} \qquad \forall k < n$

(2) $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}^{n-k} \cdot \mathbb{P}^k$

3.1. **Clasificación de Estados.**

Definición 3.9. Se define f_j^n como la probabilidad de que la primera visita al estado x_j ocurra en la etapa n.

Se puede definir recursivamente mediante

$$\begin{aligned} f_j^{(1)} &= p_{jj}^{(1)} \\ f_j^{(n)} &= p_{jj}^{(n)} - \sum_{l=1}^{n-1} f_j^{(l)} p_{jj}^{(n-l)} \end{aligned}$$

Observación 3.5. Notar que $f_j^{(n)} \neq p_{jj}^{(n)}$ para $n > 1$.

Definición 3.10. La probabilidad de regresar en algún paso al estado x_j se denota $f_j = \sum_{n=1}^{\infty} f_j^{(n)}$.

Definición 3.11. Si $f_j = 1$, el estado j se denomina *recurrente.*

Definición 3.12. Si dotamos a los estados de una cadena con la relación de equivalencia de "comunicación" (ésto es, i y j están relacionados si y sólo si se comunican entre sí), entonces los elementos del cociente (pequeñas cadenas donde todos los estados se comunican entre sí) se denominan *clases* de la cadena.

Definición 3.13. Una cadena de Markov finita se denomina *irreducible* si tiene una sola clase.

Observación 3.6. Si un estado x_j es recurrente y los estados x_i y x_j se conectan, entonces x_i también es recurrente. (Ésto se puede interpretar como que ser recurrente es una propiedad "contagiosa")

Definición 3.14. Un estado se dice *transiente* si no es recurrente.

4. Ejercicios Prácticos

4.1. Práctica 1.

Ejercicio 1.1. Sea X una v.a. no negativa y g una función diferenciable con $g(0) = 0$. Pruebe que

$$\mathbb{E}[g(X)] = \int_0^{+\infty} P(X > t)\frac{dg}{dt}(t)dt \tag{4.1}$$

Solución. Por el Teorema Fundamental del Cálculo, podemos escribir

$$g(x) = \int_0^x g'(t)dt = \int_0^{+\infty} \mathbb{1}(t < x)g'(t)dt$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[g(X)] &= \mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty} \mathbb{1}(X > t)g'(t)dt\right] \\
&= \int_0^{+\infty} \mathbb{E}[\mathbb{1}(X > t)g'(t)]dt \\
&= \int_0^{+\infty} \mathbb{E}[\mathbb{1}(X > t)]g'(t)dt \\
&= \int_0^{+\infty} (1 \cdot P(X > t) + 0 \cdot P(X \leq t))g'(t)dt \\
&= \int_0^{+\infty} P(X > t)g'(t)dt
\end{aligned}$$

■

4.2. Práctica 2.

Ejercicio 2.1. Los usuarios llegan a una ventanilla de un terminal de buses a una tasa de 21 personas/hora. Si las llegadas ocurren según un proceso de Poisson,

a) ¿Cuál es la probabilidad de que entre las 7 y 9 hrs. y entre las 10 y 12 hrs. lleguen la misma cantidad de personas, igual a 40?
b) Muestre que el número esperado de personas que llega entre las 7 y 9 hrs., y entre 10 y 12 hrs., es mayor a 40.

Solución. Sea $N_t - N_s$ el número de personas que llega entre las s y t horas. Tenemos que

$$\begin{aligned}
P(N_9 - N_7 = 40) &= P(N_{12} - N_{10} = 40) \\
&= \frac{\exp(-42) \cdot 42^{40}}{40!} \approx 0,06
\end{aligned}$$

Por otro lado, el valor esperado es $\lambda t = 21 \cdot 2 > 40$.

Ejercicio 2.2. Un mecanismo de impulsión de agua tiene una válvula que es sensible a la presencia de particulas. Los experimentos muestran que, en promedio, el mecanismo absorbe λ particulas por cada litro de agua y es dado por un proceso de Poisson. La probabilidad condicional de que una partícula entre a la válvula es igual a p.

Encuentre la distribución del número de partículas que entran a la válvula.

Solución. Sean los sucesos

$$\begin{aligned}
A_k &: \text{entran } k \text{ partículas a la válvula} \\
H_l &: \text{Entran } l \text{ partículas al mecanismo}
\end{aligned}$$

Tenemos para $l \geq k$

$$
\begin{aligned}
P(A_k) &= \sum_{l=k}^{\infty} P(A_k|H_l)P(H_l) \\
&= \sum_{l=k}^{\infty} \binom{l}{k} p^k(1-p)^{l-k}\frac{\lambda^l}{l!}\exp(-\lambda) \\
&= \sum_{l=k}^{\infty} \frac{l!}{k!(l-k)!} p^k(1-p)^{l-k}\frac{\lambda^l}{l!}\exp(-\lambda) \\
(m = l-k) \qquad &= \frac{p^k\exp(-\lambda)}{k!}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda^{m+k}}{m!}(1-p)^m \\
&= \frac{(\lambda p)^k\exp(-\lambda)}{k!}\underbrace{\sum_{m=0}^{\infty}\frac{[\lambda(1-p)]^m}{m!}}_{\exp\lambda(1-p)} \\
&= \frac{(\lambda p)^k\exp(-\lambda p)}{k!} \sim \mathrm{Poisson}(\lambda p)
\end{aligned}
$$

4.3. **Práctica 3.**

Ejercicio 3.1 (Proceso de Señal Telegráfica Aleatoria)**.** Sea $\{X_t : t \geq 0\}$ un proceso que tiene dos posibles estados:

$$
X_t = \begin{cases} +1, & \text{con probabilidad } 1/2 \\ -1, & \text{con probabilidad } 1/2 \end{cases}
$$

El número de cambios de estado dentro de un intervalo (s,t) sigue un proceso de Poisson (λ). Demuestre que $\{X_t : t \geq 0\}$ es un proceso estacionaro débil.

Solución. Debemos probar que

(1) $\mathbb{E}[X_t] = m$ (independiente de t)
 $\mathbb{E}[X_t] = 1 \cdot \frac{1}{2} + (-1)\cdot\frac{1}{2} = 0$
(2) $\mathrm{Var}(X_t) < +\infty$
 $\mathrm{Var}(X_t) = \mathbb{E}[X_t^2] - \mathbb{E}[X_t]^2 = \mathbb{E}[X_t^2]$. Luego, $\mathbb{E}[X_t^2] = 1^2\cdot\frac{1}{2} + (-1)^2\frac{1}{2} = 1 < +\infty$.
(3) $\mathrm{Cov}(X_t, X_s) = R(|t-s|)$
 Para esta parte tenemos

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X_t, X_s) &= \mathbb{E}[X_tX_s] - \mathbb{E}[X_t]\,\mathbb{E}[X_s] \\
&= \mathbb{E}[X_tX_s]
\end{aligned}
$$

 Aquí tomamos por casos, ya que

$$
X_tX_s = \begin{cases} +1, & \text{si la cantidad de cambios es par en (s,t)} \\ -1, & \text{si la cantidad de cambios es impar en (s,t)} \end{cases}
$$

 Así, dado que la cantidad de cambios sigue un proceso de Poisson, tenemos para $h = t - s$.

$$
\begin{aligned}
P(\text{cantidad de cambios es par}) &= \sum_{m=0}^{\infty} P(\text{cambios} = 2m) \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\lambda h)^{2m}\exp(-\lambda h)}{(2m)!} \\
&= \exp(-\lambda h)\cosh(\lambda h) \\
&= \frac{1+\exp(-2\lambda h)}{2}
\end{aligned}
$$

Por complemento

$$\begin{aligned} P(\text{cantidad de cambios es impar}) &= 1 - \left(\frac{1+\exp(-2\lambda h)}{2}\right) \\ &= \frac{1-\exp(-2\lambda h)}{2} \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$X_t X_s = \begin{cases} +1, & \text{con prob. } \frac{1+\exp(-2\lambda h)}{2} \\ -1, & \text{con prob. } \frac{1-\exp(-2\lambda h)}{2} \end{cases}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} \operatorname{Cov}(X_t, X_s) &= \mathbb{E}[X_t X_s] \\ &= \exp(-2\lambda h) \\ &= \exp(-2\lambda|t-s|) \end{aligned}$$

Así, de (1), (2) y (3), se tiene que $\{X_t : t \geq 0\}$ es un proceso estacionario débil.

Ejercicio 3.2. Sea $\{Y_t : t \geq 0\}$ un proceso estocástico donde

$$Y_t = Y(t) = aX + t, \qquad X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2), a \in \mathbb{R}$$

Calcule $\mathbb{E}(Y_t)$, $\operatorname{Var}(Y_t)$, $\operatorname{Cov}(Y_t, Y_s)$ y $\operatorname{Corr}(Y_t, Y_s)$.

Solución.

(1)
$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y_t) &= \mathbb{E}[aX + t] \\ &= a\mu + t \end{aligned}$$

Definiendo $\mathring{Y}_t := Y_t - \mathbb{E}(Y_t)$, se tiene que $\mathring{Y}_t = a(X-\mu) = a\mathring{X} \sim \mathcal{N}(0, a^2\sigma^2)$. Luego,

(2)
$$\begin{aligned} \operatorname{Cov}(Y_t, Y_s) &= \operatorname{Cov}(\mathring{Y}_t, \mathring{Y}_s) \\ &= \operatorname{Cov}(a\mathring{X}, a\mathring{X}) \\ &= \operatorname{Var}(a\mathring{X}) \\ &= a^2\sigma^2 \end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned} \operatorname{Var}(Y_t) &= \operatorname{Var}(aX + t) \\ &= a^2 \operatorname{Var}(X) \\ &= a^2\sigma^2 \end{aligned}$$

(4)
$$\begin{aligned} \operatorname{Corr}(Y_t, Y_s) &= \frac{\operatorname{Cov}(Y_t, Y_s)}{\sqrt{\operatorname{Var}(Y_t)\operatorname{Var}(Y_s)}} \\ &= \frac{a^2\sigma^2}{\sqrt{a^2\sigma^2 a^2\sigma^2}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Ejercicio 3.3. Sea $\{Y_t : t \geq 0\}$ un proceso estocástico tal que

$$Y_t = tX + a, \qquad X \sim U(\alpha, \beta), a \in \mathbb{R}$$

Calcule $\mathbb{E}(Y_t)$, $\operatorname{Var}(Y_t)$, $\operatorname{Cov}(Y_t, Y_s)$ y $\operatorname{Corr}(Y_t, Y_s)$.

Solución.

(1)
$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y_t) &= t\,\mathbb{E}[X] + a \\ &= t\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) + a \end{aligned}$$

Definiendo $\mathring{Y}_t = Y_t - \mathbb{E}(Y_t) = \overbrace{t(X - \mu_X)}^{t\mathring{X}}$. Se tiene que $\operatorname{Var}(\mathring{X}) = \operatorname{Var}(X - \mu_X) = \operatorname{Var}(X) = \frac{(\beta-\alpha)^2}{12} = \sigma_X^2$.

(2)
$$\begin{aligned}\operatorname{Cov}(Y_t, Y_s) &= \operatorname{Cov}(\mathring{Y}_t, \mathring{Y}_s)\\ &= \operatorname{Cov}(t\mathring{X}, s\mathring{X})\\ &= ts\operatorname{Cov}(\mathring{X}, \mathring{X})\\ &= ts\operatorname{Var}(\mathring{X})\\ &= \frac{ts(\beta-\alpha)^2}{12}\end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned}\operatorname{Var}(Y_t) &= \operatorname{Cov}(Y_t, Y_t)\\ &= \frac{t^2(\beta-\alpha)^2}{12}\end{aligned}$$

(4)
$$\begin{aligned}\operatorname{Corr}(Y_t, Y_s) &= \frac{\operatorname{Cov}(Y_t, Y_s)}{\sqrt{\operatorname{Var}(Y_t)\operatorname{Var}(Y_s)}}\\ &= 1\end{aligned}$$

Ejercicio 3.4. Sea $\{Y_t : t \geq 0\}$ dado por $Y_t = \exp(-Xt)$, $t > 0$, donde X es una v.a. con función de densidad $p(x) = \lambda\exp(-\lambda x)$, con $x, \lambda > 0$.

Calcule $\mathbb{E}(Y_t)$, $\operatorname{Var}(Y_t)$, $\operatorname{Cov}(Y_t, Y_s)$ y $\operatorname{Corr}(Y_t, Y_s)$.

Solución.

(1)
$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y_t) &= \int_0^\infty \exp(-xt)\lambda\exp(-\lambda x)dx\\ &= \frac{\lambda}{t+\lambda}\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}\operatorname{Cov}(Y_t, Y_s) &= \mathbb{E}(Y_tY_s) - \mathbb{E}(Y_t)\,\mathbb{E}(Y_s)\\ &= \frac{\lambda}{s+t+\lambda} - \frac{\lambda}{t+\lambda}\frac{\lambda}{s+\lambda}\\ &= \frac{\lambda ts}{(\lambda+t+s)(\lambda+t)(\lambda+s)}\end{aligned}$$

(3)
$$\operatorname{Var}(Y_t, Y_s) = \frac{\lambda t^2}{(\lambda+2t)(\lambda+t)^2}$$

(4)
$$\operatorname{Corr}(Y_t, Y_s) = \frac{\sqrt{2t+\lambda}\sqrt{2s+\lambda}}{t+s+\lambda}$$

4.4. **Práctica 4.**

Definición 4.1. Un proceso estocástico elemental es aquél donde la dependencia de "tiempo" t es dada por una función determinista que tiene uno o más parámetros aleatorios.

Ejercicio 4.1. Encuentre la familia de realizaciones (trayectorias) para el proceso $X(t) = \eta\exp(-t)$, $t > 0$ donde $\eta \sim U(-1, 1)$.

4.5. **Práctica 5.**

Ejercicio 5.1. Sea un proceso estocástico $\{Y_t : t \in \mathbb{Z}\}$, dado por $Y_t = \displaystyle\sum_{j=1}^{t} w_j$, donde $w_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ son independientes e idénticamente distribuidas.

Demuestre que

a) $\mathbb{E}(Y_t) = 0$, $\forall t \in \mathbb{Z}$

b) $\{Y_t : t \in \mathbb{Z}\}$ no es un proceso estacionario

Solución.

a) $\mathbb{E}(Y_t) = \mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^{t} w_j\right) = \sum_{j=1}^{t} \mathbb{E}(w_j) = 0.$

b) De la definición de proceso estacionario, se puede probar que $\operatorname{Cov}(Y_t, Y_{t+h})$ no es independiente de t y así concluir que no es estacionario débil (y por lo tanto, tampoco estricto).

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Cov}(Y_t, Y_{t+h}) &= \operatorname{Cov}\left(\sum_{j=1}^{t} w_j, \sum_{j=1}^{t+h} w_j\right) \\
&= \operatorname{Cov}\left(\sum_{j=1}^{t} w_j, \sum_{j=1}^{t} w_j\right) + \overbrace{\operatorname{Cov}\left(\sum_{j=1}^{t} w_j, \sum_{j=t+1}^{t+h} w_j\right)}^{\text{Independientes}} \\
&= \operatorname{Var}\left(\sum_{j=1}^{t} w_j\right) \\
\text{(Por independencia de } w_j\text{)} \qquad &= \sum_{j=1}^{t} \operatorname{Var}(w_j) \\
&= t\sigma^2
\end{aligned}
$$

■

Ejercicio 5.2. Sea $\{Y_t : t \in \mathbb{N}\}$ un proceso estacionario estricto con $\mathbb{E}(Y_t) = m < +\infty$ y $\operatorname{Cov}(Y_t, Y_{t+h}) = R(|h|)$.

Sea $\{X_t : t \in \mathbb{N}\}$ un proceso definido de la siguiente manera

$$
X_t = \begin{cases} Y_t, & \text{si } t \text{ es impar} \\ Y_t + 1, & \text{si } t \text{ es par} \end{cases}
$$

a) Pruebe que $\operatorname{Cov}(Y_t, Y_{t+h}) = \operatorname{Cov}(X_t, X_{t+h})$.

b) Demuestre que X_t no es estacionario.

Ejercicio 5.3. En cierto juego se gana o se pierde \$100 con probabilidad p y $1-p$ respectivamente.

Un cierto jugador comienza con \$200 y pretende jugar hasta obtener \$400 y retirarse. También se retira si pierde todo su capital.

a) Después de jugar 2 veces, ¿cuál es la probabilidad que siga teniendo \$200?

b) ¿Cuál es la probabilidad que esté arruinado a la cuarta jugada?

c) ¿Cuál es la probabilidad que pierda justo en la cuarta jugada?

Email address: `jmanriquezr@udec.cl`