

Circuitos RLC en Serie

Resolución de la ecuación diferencial asociada

CONTENIDOS

| | | |
|------|---|---|
| 1. | Planteamiento del problema | 1 |
| 2. | Resolución de la Ecuación Diferencial | 2 |
| 2.1. | Solución transiente | 3 |
| 2.2. | Solución estacionaria | 3 |
| 2.3. | Ejemplos | 4 |
| 3. | Casos particulares | 6 |
| 3.1. | Comportamiento para tiempos prolongados | 6 |
| 3.2. | Fenómeno de resonancia | 6 |
| 3.3. | Sistema no amortiguado en resonancia | 6 |
| | References | 7 |

1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Se considera el siguiente circuito RLC en serie con una FEM de corriente alterna, indicado en la Figura 1.1

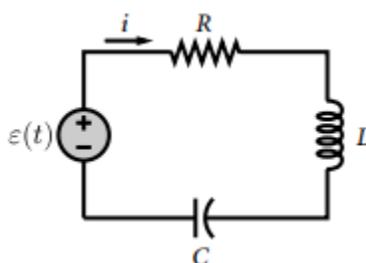


FIGURE 1.1. Circuito RLC en serie

donde L es la inductancia, R es la resistencia y C es la capacitancia de los elementos eléctricos respectivos. Aplicando la Ley de Kirchoff para voltajes en un instante t , se deduce la siguiente expresión

$$(1.1) \quad L \frac{dI}{dt}(t) + RI(t) + \frac{Q(t)}{C} - \varepsilon(t) = 0$$

considerando $I = \frac{dQ}{dt}$, se deduce la siguiente ecuación diferencial de segundo orden,

$$(1.2) \quad L \frac{d^2Q}{dt^2}(t) + R \frac{dQ}{dt}(t) + \frac{1}{C}Q(t) = \varepsilon(t)$$

en algún intervalo de tiempo dado.

Dotando el sistema de condiciones iniciales para la carga Q_0 del capacitor y la corriente I_0 , además de considerar la FEM de corriente alterna como $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cos(\gamma t)$ tenemos el problema de Cauchy

$$(1.3) \quad \begin{cases} L \frac{d^2 Q}{dt^2}(t) + R \frac{dQ}{dt}(t) + \frac{1}{C} Q(t) = \varepsilon_0 \cos(\gamma t) & t \geq 0 \\ Q(0) = Q_0 \\ \frac{dQ}{dt}(0) = I_0 \end{cases}$$

2. RESOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL

Inspeccionando la estructura del problema de valores iniciales dado en (1.3), notamos que se puede hacer una analogía inmediata con un sistema dinámico con un grado de libertad [1], siendo la carga Q el análogo de la posición y la corriente $\frac{dQ}{dt}$ el de la velocidad, como es indicado en la Figura 2.1.

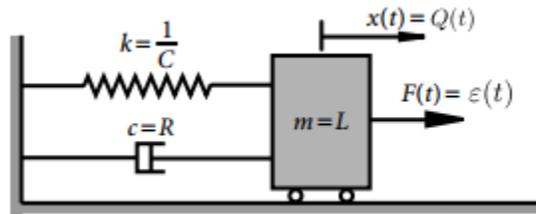


FIGURE 2.1. Sistema masa-resorte

Así, tiene sentido reescribir la ecuación diferencial en función de sus frecuencias naturales y factores de amortiguamiento.

Considerando

$$\begin{aligned} \frac{1}{LC} = \omega_0^2 &\Leftrightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ \frac{R}{L} = 2\zeta\omega_0 &\Leftrightarrow \zeta = R\sqrt{\frac{C}{4L}} \end{aligned}$$

donde ω_0 es la frecuencia natural del sistema y ζ es el coeficiente de amortiguamiento.

Por lo tanto, reescribimos la ecuación como

$$(2.1) \quad (D^2 + 2\zeta\omega_0 D + \omega_0^2)Q(t) = \frac{\varepsilon_0}{L} \cos(\gamma t)$$

donde $D := \frac{d}{dt}$ es el operador diferencial.

A continuación analizaremos la solución transiente $Q_H(t)$ (homogénea) del sistema, que depende de las condiciones iniciales impuestas, y la solución estacionaria $Q_P(t)$ (particular). Una vez determinadas, por principio de superposición de soluciones, la solución estará dada por

$$(2.2) \quad Q(t) = Q_H(t) + Q_P(t)$$

Al igual que para un sistema dinámico, se analizarán tres casos de amortiguamiento y se estudiará, en primera instancia, forzamientos que no produzcan resonancia.

2.1. Solución transiente. La ecuación asociada al caso transiente de (2.1) es

$$(2.3) \quad (D^2 + 2\zeta\omega_0 D + \omega_0^2)Q(t) = 0$$

cuya ecuación característica es $\lambda^2 + 2\zeta\omega_0\lambda + \omega_0^2 = 0$, con raíces $\lambda_{1,2} = \omega_0(\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1})$.

De aquí en adelante, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ son constantes a determinar con las condiciones iniciales.

2.1.1. Sistema Subamortiguado $0 \leq \zeta < 1$. Para este caso, dadas las raíces complejas de la ecuación característica, la solución transiente está dada por

$$(2.4) \quad Q_H(t) = \exp(-\zeta\omega_0 t) (C_1 \cos(\omega_d t) + C_2 \sin(\omega_d t))$$

donde $\omega_d := \omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2}$ es la frecuencia natural amortiguada (o *damped natural frequency*, en inglés).

Notemos que esta expresión puede simplificarse utilizando una función sinusoidal, de manera que el comportamiento de decrecimiento oscilatorio sea más explícito

$$(2.5) \quad Q_H(t) = A \exp(-\zeta\omega_0 t) \cos(\omega_d t - \varphi)$$

considerando $A := \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ y $\varphi := \tan^{-1} \left(\frac{C_2}{C_1} \right)$.

2.1.2. Sistema Críticamente Amortiguado $\zeta = 1$. En este caso las raíces de la ecuación característica son reales e idénticas, por lo que la solución transiente es

$$(2.6) \quad Q_H(t) = (C_1 + C_2 t) \exp(-\omega_0 t)$$

que decrece exponencialmente sin un carácter oscilatorio como anteriormente.

2.1.3. Sistema Sobreamortiguado $\zeta > 1$. Cuando las raíces de la ecuación característica son reales y distintas, la respuesta transiente es

$$(2.7) \quad Q_H(t) = C_1 \exp\left(-\omega_0(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})t\right) + C_2 \exp\left(-\omega_0(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})t\right)$$

2.2. Solución estacionaria. Como se mencionó antes, se supondrá que no se entra en resonancia, es decir, $\gamma^2 \neq \omega_0^2$.

Por simple inspección suponemos que la respuesta estacionaria debe ser de la forma sinusoidal $Q_P(t) = C_1 \cos(\gamma t + \phi)$ con $C_1, \phi \in \mathbb{R}$. Utilizando el método de los coeficientes indeterminados, se obtiene la solución particular (simplificada)

$$(2.8) \quad Q_P(t) = \frac{\varepsilon_0}{L} \sqrt{\frac{1}{(\omega_0^2 - \gamma^2)^2 + (2\zeta\omega_0\gamma)^2}} \cos(\gamma t + \phi)$$

donde $\phi := \tan^{-1} \left(-\frac{2\zeta\omega_0\gamma}{\omega_0^2 - \gamma^2} \right)$.

Definiendo la proporción de frecuencias $r := \frac{\gamma}{\omega_0}$ podemos simplificar la expresión a

$$(2.9) \quad Q_P(t) = C\varepsilon_0 \sqrt{\frac{1}{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} \cos(\gamma t + \phi)$$

donde $\phi := \tan^{-1} \left(-\frac{2\zeta r}{1 - r^2} \right)$.

Notemos que esto nos dice que la respuesta estacionaria del sistema y la corriente alterna que se le suministra están desfasadas por $t_{lag} = \frac{\phi}{\gamma}$.

Si $r \rightarrow 0$, cuando la frecuencia de excitación es pequeña con respecto a la natural, se aprecia que la respuesta estacionaria es casi estáica. Por otro lado, si la excitación es muy grande con respecto a la frecuencia natural del sistema, i.e., $r \rightarrow +\infty$, notamos que la amplitud tiende a 0 y el sistema casi no presenta respuesta.

2.3. Ejemplos.

2.3.1. *Ejemplo 1.* Supongamos un circuito con una resistencia de $2.5 [k\Omega]$, un inductor de $1 [H]$ y un capacitor de $3 [\mu F]$. El circuito está sobreamortiguado pues $\zeta \approx 2.16$ y su frecuencia de resonancia es $\omega_0 \approx 577 [Hz]$. Supóngase que el circuito estaba completamente descargado hasta que se incorporó una fuente de corriente alterna con $\epsilon(t) = 200 \cos(\gamma t) [V]$.

En la Figura 2.2 se aprecia la solución numérica de este problema. Para valores pequeños de γ se obtuvieron las curvas de forma exponencial con mayor amplitud. A medida que aumentaba la frecuencia, la amplitud del sistema disminuía por su amortiguamiento.

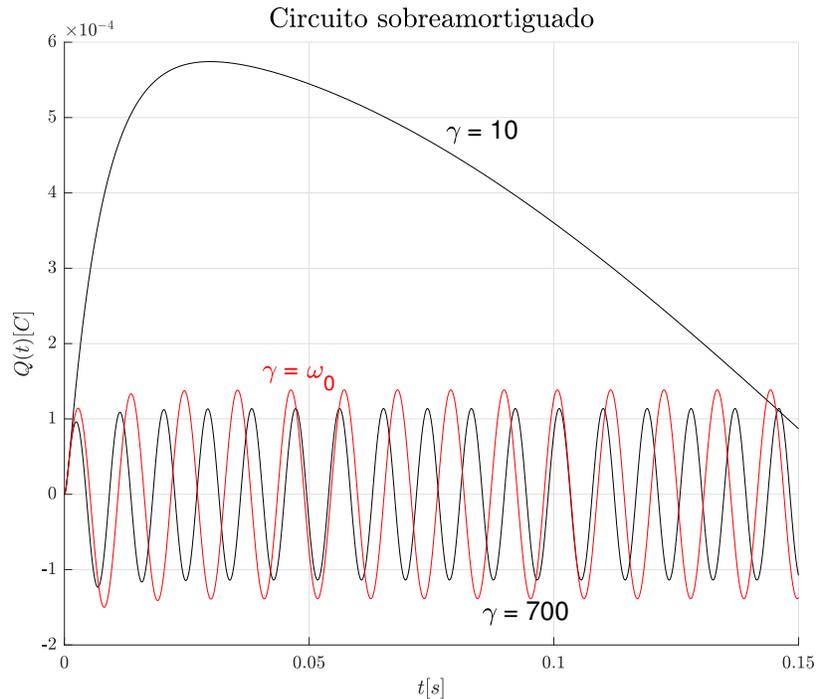


FIGURE 2.2. Circuito sobreamortiguado

Por otro lado si cambiamos la resistencia del Ejemplo 1 a una de $0.25 [k\Omega]$ el sistema pasa a ser subamortiguado con $\zeta \approx 0.216$ y la misma frecuencia de resonancia. En la Figura 2.3 se aprecia como cambia la situación ahora cuando la frecuencia de excitación coincide con ω_0 .

2.3.2. *Ejemplo 2.* Consideremos el mismo circuito sobreamortiguado del Ejemplo 1, pero agregando condiciones iniciales no nulas. Supóngase que el capacitor estaba cargado hasta $0.5 [mC]$ y que no había una corriente inicial al cerrar el circuito.

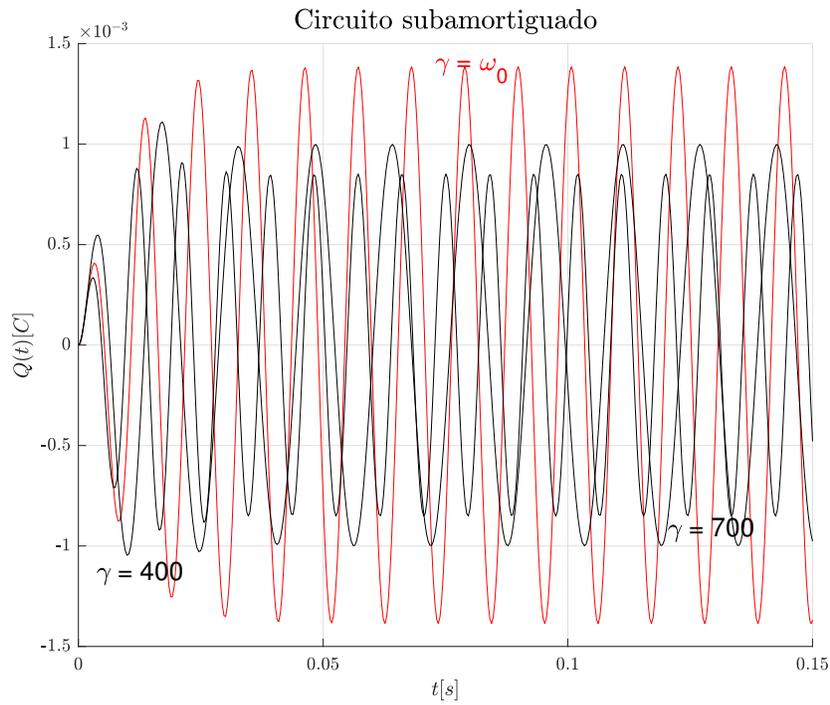


FIGURE 2.3. Circuito subamortiguado

En la Figura 2.4 se aprecia que, dadas nuevas condiciones iniciales, el sistema cambia brevemente al comienzo, pero la respuesta transiente se anula rápidamente y se obtiene el mismo resultado pasado un tiempo determinado.

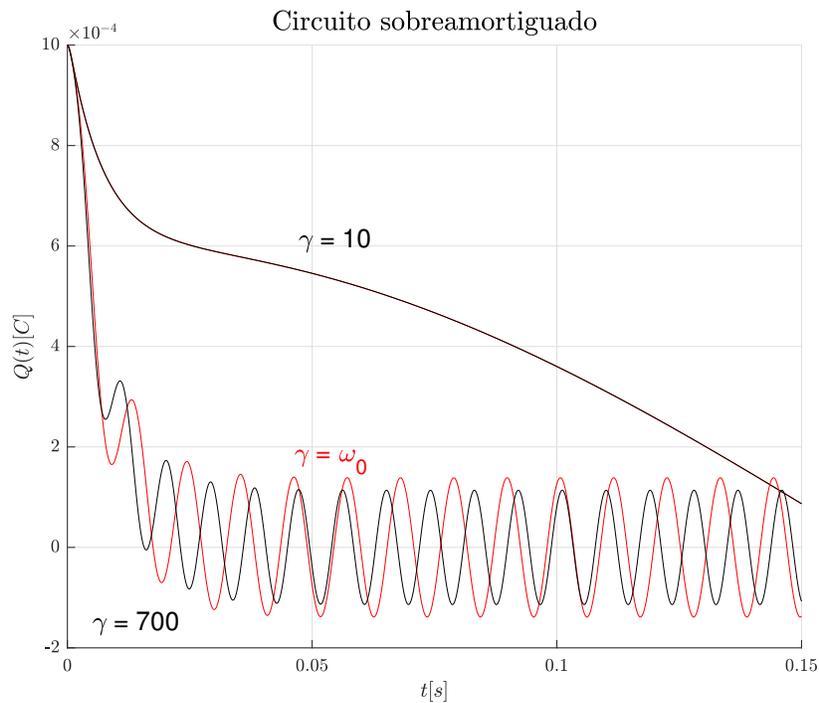


FIGURE 2.4. Circuito sobreamortiguado con condiciones no nulas

La razón de este fenómeno de “estabilidad de soluciones” se analiza a continuación.

3. CASOS PARTICULARES

3.1. Comportamiento para tiempos prolongados. Si se estudia la evolución del sistema para tiempos largos, es decir $t \rightarrow +\infty$, se debe separar la solución en su componente transiente y estacionaria. Así,

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow +\infty} Q(t) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} Q_H(t) + Q_P(t) \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} Q_H(t) + \lim_{t \rightarrow +\infty} Q_P(t)\end{aligned}$$

de (2.5), (2.6) y (2.7) notamos que todas tienen un decrecimiento exponencial, por lo que para los tres casos anteriores se tiene

$$(3.1) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} Q_H(t) = 0$$

Así, para tiempos prolongados, la solución está caracterizada completamente por su componente estacionaria. Del análisis anterior sabemos que se comportará como una onda sinusoidal desfasada en $t_{lag} = \frac{\phi}{\gamma}$ con su amplitud respectiva.

3.2. Fenómeno de resonancia. El fenómeno de resonancia [2] ocurre cuando la frecuencia de excitación γ coincide con la frecuencia natural del sistema ω_0 . Este efecto no está presente en la solución transiente, sino en la respuesta estacionaria.

Para el caso amortiguado ($\zeta > 0$) ya hemos estudiado la respuesta sin resonancia. Para agregar este efecto debemos considerar $\gamma \rightarrow \omega_0 \Rightarrow r \rightarrow 1$. Suponiendo un sistema con configuración RLC dada, los valores de ω_0 y ζ son constantes, por lo que la amplitud y desfase son funciones de r . Así,

$$\begin{aligned}\lim_{r \rightarrow 1} \sqrt{\frac{1}{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} &= \frac{1}{2\zeta} \\ \lim_{r \rightarrow 1} \phi &= \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

Para valores pequeños de amortiguamiento, i.e. $\zeta \ll 1$, la amplitud encuentra su máximo en $r = 1$ y es inversamente proporcional a ζ .

De esto notamos que la respuesta en resonancia alcanza amplitud y desfase máximo para el caso subamortiguado.

Por otro lado, para el caso críticamente amortiguado y sobreamortiguado este fenómeno se evita pues el máximo no se alcanza en valores positivos de r .

En la Figura 3.1 se aprecian las amplitudes de oscilación para distintos valores de amortiguamiento con respecto a la proporción de frecuencias r .

3.3. Sistema no amortiguado en resonancia. Supongamos un circuito RLC con una resistencia despreciable, i.e. $R \approx 0$. De aquí tendríamos $\zeta \rightarrow 0$, lo que no es compatible directamente con todo el análisis hecho hasta este punto.

Agregando la solución transiente y particular correspondiente, omitiendo tediosos pasos de sustituir e igualar coeficientes, la solución es

$$(3.2) \quad Q(t) = A \cos(\omega_0 t - \varphi) + \frac{\varepsilon_0}{2L\omega_0} t \cos(\omega_0 t)$$

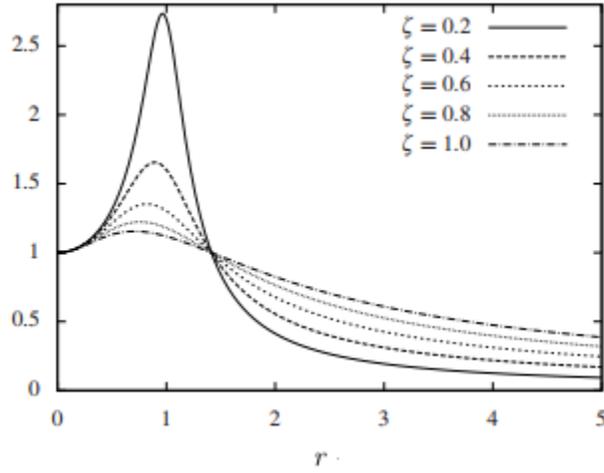


FIGURE 3.1. Amplitudes cercanas a resonancia

donde $A = \sqrt{Q_0^2 + \left(\frac{I_0}{\omega_0}\right)^2}$, $\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{I_0}{\omega_0 Q_0}\right)$

Es fácil ver que

$$(3.3) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} |Q(t)| = +\infty$$

En este caso, al no existir amortiguamiento, la excitación resonante aumenta en magnitud descontroladamente a medida que el tiempo avanza. Esto está descrito en su segundo término no acotado.

REFERENCES

- [1] Xie, W., *Differential Equations for Engineers*, ISBN-13 978-0-511-77622-9.
- [2] Goodwine, B., *Engineering Differential Equations*, ISBN 978-1-4419-7918-6.