TEMA 2. MOVIMIENTO EN UNA DIMENSION.

La cinemática es la rama de la mecánica que estudia la geometría del movimiento. Usa las magnitudes fundamentales longitud, en forma de camino recorrido, de posición y de desplazamiento, con el tiempo como parámetro. La magnitud física masa no interviene en esta descripción. Además surgen como magnitudes físicas derivadas los conceptos de velocidad y aceleración.

Para conocer el movimiento del objeto es necesario hacerlo respecto a un sistema de referencia, donde se ubica un observador en el origen del sistema de referencia, que es quien hace la descripción. Para un objeto que se mueve, se pueden distinguir tres tipos de movimientos: ***traslación*** a lo largo de alguna dirección variable pero definida, ***rotación*** del cuerpo alrededor de algún eje y ***vibración***. Generalmente el movimiento de traslación en el espacio está acompañado de rotación y de vibración del cuerpo, lo que hace que su descripción sea muy compleja. En este caso es necesario hacer un modelo simple y estudiar cada movimiento en forma separada, considerando un primer paso al estudio con simplificaciones y aproximaciones. La primera aproximación es considerar al cuerpo como una partícula, la segunda es considerar sólo el movimiento de traslación, una tercera aproximación es considerar el movimiento en una sola dirección.

2.1 DEFINICIONES.

Cinemática*:* describe el movimiento de los cuerpos en el universo sin considerar las causas que lo producen.

Movimiento*:* es el cambio continuo de la posición de un objeto en el transcurso del tiempo.

Partícula*:* el concepto intuitivo de partícula corresponde a un objeto muy pequeño que puede tener forma, color, masa, etc., como por ejemplo un grano de arena. El concepto abstracto es una idealización de un objeto considerado como un punto matemático sin dimensiones, que tendrá sólo posición, masa y movimiento de traslación. Otros ejemplos de objetos que se pueden considerar como partícula son un átomo, hormiga, un avión, la Tierra, etc., en este último caso se justifica si se estudia su movimiento de traslación en torno al Sol.

Posición*:* es la ubicación de un objeto (partícula) en el espacio, relativa a un sistema de referencia. Es un vector y se denota por:

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}\,, \qquad (2.1)$$

donde *x, y* y *z* son los valores de la posición en cada dirección, e ***i, j*** y ***k*** son los vectores unitarios en dirección de cada eje *x, y* y *z*, respectivamente. En una dimensión es simplemente $\vec{r} = x\hat{i}$, en el SI se mide en metros. Es una de las variables básicas del movimiento, junto con el tiempo. La posición se puede dibujar en un sistema de referencia en una y dos dimensiones como se muestra en la figura 2.1:

Fig. 2.1a: Una dimensión

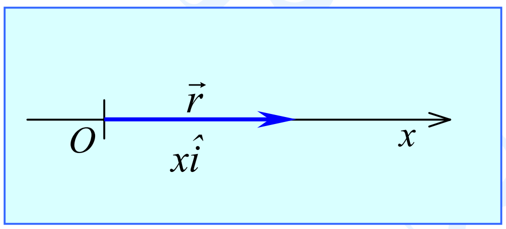
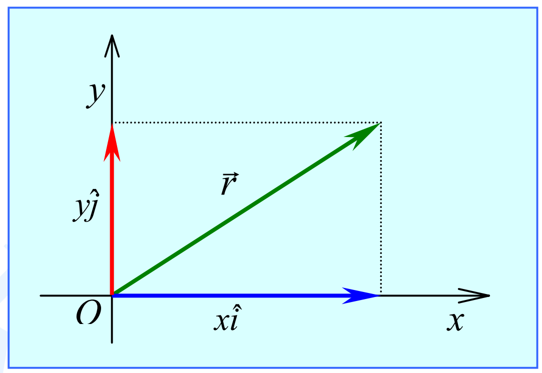


Fig. 2.1b: Dos dimensiones



Desplazamiento*:* se define como el cambio de posición de una partícula en el espacio (para indicar cambios o diferencias finitas de cualquier variable en física se usa el símbolo delta, Δ). Es independiente de la trayectoria que se siga para cambiar de posición. Para determinarlo se debe conocer la posición inicial $\boldsymbol{r_i}$ y final $\boldsymbol{r_f}$ de la partícula. En una dimensión y en dos dimensiones, el desplazamiento es:

$$\Delta\vec{x} = (x_f - x_i)\hat{i}\,, \quad \Delta\vec{r} = \vec{r}_f - \vec{r}_i = (x_f\hat{i} + y_f\hat{j}) - (x_i\hat{i} + y_i\hat{j}) \qquad (2.2)$$

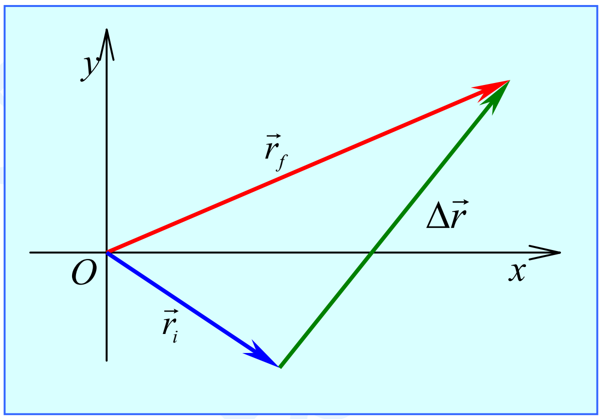
E1 desplazamiento es un vector, que puede ser positivo, negativo o cero, se dibuja en el esquema de la figura 2.2.

Trayectoria*:* es la curva geométrica que describe una partícula en movimiento en el espacio, y se representa por una ecuación de la trayectoria. En una dimensión es una recta $y = cte$, en dos dimensiones puede ser una parábola $y = a + bx^2$ o una circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$.

Distancia*:* es la longitud que se ha movido una partícula a lo largo de una trayectoria desde una posición inicial a otra final. Su valor numérico en general no coincide con el valor numérico del desplazamiento, excepto en casos muy particulares.

Tiempo: ¿Qué es el tiempo? No es fácil definir físicamente el concepto de tiempo. Es más simple hablar de intervalo de tiempo, que lo podemos definir como la duración de un evento, o si consideramos posición y sus cambios, podemos decir que el tiempo es lo que tarda una partícula en moverse desde una posición inicial a otra final.

Fig. 2.2



2.2 VELOCIDAD Y ACELERACION.

E1 movimiento de una partícula se describe por completo si se conoce su posición en cualquier instante. Para encontrar leyes que expliquen los diferentes cambios de los cuerpos en el tiempo, se deben registrar los cambios y describirlos. Algunos cambios son difíciles de describir, como por ejemplo los movimientos de una nube, formada por billones de gotitas de agua que se mueven al azar y pueden evaporarse o unirse para formar gotas más grandes, o bien los cambios de opinión de una mujer. Para describir el movimiento debemos definir otras variables cinemáticas, que son la *velocidad* y la *aceleración*.

2.2.1 Velocidad.

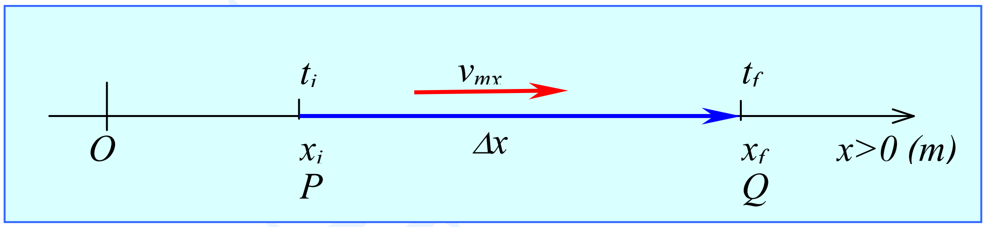
Para una partícula que se mueve en dirección del eje *x,* desde la posición inicial x_i que en un instante inicial t_i se encuentra en el punto *P*, hasta la posición final x_f que en un instante final t_f se encuentra en el punto *Q*, el desplazamiento de la partícula en el intervalo de tiempo $\Delta t = t_f - t_i$ es $\Delta\vec{x} = \vec{x}_f - \vec{x}_i$. Se elige el siguiente sistema de referencia (figura 2.3):

Se define la componente *x* de la velocidad media de la partícula $\vec{v}_{mx}$ como el cambio de posición en un intervalo de tiempo,

$$\vec{v}_{mx} = \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} = \frac{\vec{x}_f - \vec{x}_i}{t_f - t_i} \qquad (2.3)$$

De su definición se obtiene que la unidad de medida de la velocidad media en el SI es el cuociente entre la unidad de medida de longitud y de tiempo, esto es *m/s*, que se lee metros por segundo.

Figura 2.3



2.2.2 Velocidad instantánea.
Es el vector velocidad ***v*** de una partícula en un instante determinado.

Rapidez.
Se define como rapidez instantánea a la magnitud o valor numérico del vector velocidad, por lo tanto es siempre positiva.

2.2.3 Aceleración media.
Lo normal es que la velocidad de una partícula varíe en el transcurso del tiempo, entonces se dice que la partícula tiene ***aceleración***. Se define la aceleración media $\boldsymbol{a_m}$ como el cambio de velocidad en un intervalo de tiempo por:

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_i}{t_f - t_i} \qquad (2.5)$$

La aceleración media es un vector, su unidad de medida en el SI es el resultado de dividir la unidad de medida de velocidad y de tiempo, esto es *(m/s)/s,* se lee m/s^2.

2.2.4 Aceleración instantánea.
Es la aceleración ***a*** de la partícula en un instante determinado.

Si la aceleración es constante, entonces $v_m = (v_i + v_f)/2$, es el promedio simple entre los distintos valores de rapidez.

La aceleración también puede variar en el tiempo, pero esa variación no tiene significado físico de importancia, por lo que no se le da un nombre en particular. Aunque *d**a**/dt* podría representar o llamarse algo así como "sacudón" o "empujón". También puede existir una variación del *empujón* y así hasta el infinito.

***Ejemplo 1**: Una partícula se mueve en dirección x > 0 durante 10 s con rapidez constante de 18 km/h, luego acelera hasta 25 m/s durante 5 s. Calcular: a) su desplazamiento en los primeros 10 s, b) la aceleración media en cada intervalo de tiempo, c) la rapidez media del movimiento.*

***Solución:** Datos $\Delta t_1 = 10$ s, $v_i = 18$ km/h $= 5$ m/s, $\Delta t_2 = 5$ s, $v_f = 25$ m/s*

a) $v = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow \Delta x = v\Delta t = 5\,m/s \times 10s = 50m$

b) para Δt_1: $v_i = cte \Rightarrow a = 0$

para Δt_2: $a = \dfrac{\Delta v}{\Delta t} = \dfrac{(25-5)m/s}{5s} = 4m/s^2$

c) $v_m = \dfrac{v_i + v_f}{2} = \dfrac{(5+25)m/s}{2} = 15m/s$

2.3 DESCRIPCIÓN DEL MOVIMIENTO EN UNA DIMENSIÓN CON ACELERACIÓN CONSTANTE.

Describir el movimiento significa poder responder a la pregunta ¿dónde se encuentra el cuerpo en movimiento en cualquier instante de tiempo? Si la aceleración ***a*** varía en el tiempo el movimiento puede ser muy complejo y difícil de analizar. Un caso simple de movimiento es aquel que se realiza en una dirección con aceleración constante. Si la aceleración es constante, entonces la $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_m$, lo que significa que la velocidad cambia de manera uniforme en todo el movimiento.

Consideremos primero el caso de una partícula que se mueve en dirección del eje x con la magnitud de la aceleración a constante. Si v_0 es la rapidez en el instante inicial t_0, y v su valor en el instante t, de la definición de a se tiene:

$$\boxed{\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}(t - t_0)} \qquad (2.7)$$

La ecuación 2.7 permite determinar la velocidad $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(t)$ de una partícula que se mueve en una dirección con aceleración $\boldsymbol{a}$ constante, para cualquier instante $t > t_0$. Como v_0, a y t_0 son valores conocidos, se observa que v es una función lineal del tiempo t. Conocida $v = v(t)$ se puede usar la definición de la velocidad para obtener la posición de la partícula en cualquier instante. Inicialmente, para $t = t_o$, la partícula se encuentra en la posición x_o y en cualquier instante t se encuentra en la posición x. Como x_o, v_o y a son los valores conocidos para $t = t_o$, se deduce que x es sólo función del tiempo, así la ecuación que describe la posición de una partícula en movimiento en función del tiempo $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$ es:

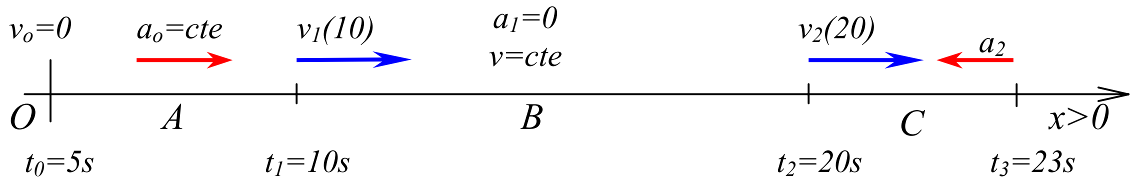
$$\boxed{\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{v}_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\vec{a}(t - t_0)^2} \quad (2.8)$$

La ecuación 2.8 es la expresión que permite determinar el valor de la posición de la partícula en cualquier instante, conocido los valores iniciales. Esta ecuación $x(t)$ también se conoce como "*ecuación de itinerario*". Estas ecuaciones forman el conjunto que permiten describir el movimiento simple de una partícula que se mueve con aceleración constante en una dirección, y como con esas ecuaciones se pueden determinar los valores de esas variables para la partícula en cualquier instante, el movimiento queda completamente descrito.

Si la aceleración de una partícula en movimiento es constante, se tiene que $v^2 = v_o^2 + 2a\Delta x$, que es una expresión escalar independiente del tiempo.

Ejemplo 2. *un móvil parte desde el reposo en el instante t = 5 s y acelera hacia la derecha a razón de 2 m/s^2 hasta t = 10 s. A continuación mantiene su velocidad constante durante 10 s. Finalmente frena hasta detenerse, lo que logra hacer 3 segundos más tarde. a) Determinar a qué distancia del punto de partida se encuentra en t = 10 s. b) ¿Con qué velocidad se mueve en ese instante? c) ¿A qué distancia de la partida se encuentra cuando empieza a frenar? d) ¿Dónde se detiene respecto al punto de partida? e) Escriba las ecuaciones correspondientes a: a(t), v(t), x(t) para cada etapa del movimiento.*

Solución: Se puede elegir el SR como el cliente guste; una posibilidad se ilustra en el siguiente esquema, donde inicialmente se ubica a la partícula en el origen *O* y se empieza a medir el tiempo desde el instante inicial *5 s*.



a) Se pide evaluar $x(t)$ para $t = 10\ s$, con las condiciones $x_o = 0,\ v_o = 0,\ a_o = 2m/s^2,\ t_o = 5s,\ t_1 = 10s$, en el tramo A

$$x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a_0(t - t_0)^2$$

$$x(10) = 0 + 0 + \frac{1}{2} \cdot 2\frac{m}{s^2}(10 - 5)^2 s^2 = 25m$$

b) Ahora hay que calcular $v(t)$ en $t = 10\ s$, usando la ecuación:

$$v(t) = v_0 + a_0(t - t_0)$$

$$v(10) = 0 + 2\frac{m}{s^2}(10 - 5)s = 10\ m/s$$

c) Piden evaluar $x(t)$ para $t = 20\ s$, usando esquema y datos del tramo B:

$$x(t) = x_{10} + v_{10}(t - t_1) + \frac{1}{2}a_1(t - t_1)^2$$

$$x(20) = 25m + 10\frac{m}{s}(20 - 10)s + 0 = 125m$$

d) Aquí se pide calcular $x(t)$ para $t = 23\ s$, se conoce $v_f = 0,\ t_3 = 23\ s$, pero no se conoce a_2, por lo que se debe calcular.

$$x(t) = x_{20} + v_{20}(t_3 - 20) + \frac{1}{2}a_2(t - 20)^2$$

cálculo de a_2:

$$v = v_2 + a_2(t - t_2) \text{ en el tramo C}$$

$$0 = v_2 + a_2(t_3 - 20) \Rightarrow a_2 = -\frac{v_2}{t_3 - 20}$$

Pero v_2 = cte en el tramo B $v_2 = 10\ m/s$

$$a = -\frac{10m/s}{(23-20)s} = -\frac{10}{3}\frac{m}{s^2}$$

$$x(t) = 125 + 10(23-20) - \frac{1}{2}\frac{10}{3}\cdot(23-20)^2 = 140m$$

$$\Rightarrow x(23) = 140m$$

e) Ecuaciones de movimiento:

Para el tramo A: $x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a_o(t - t_0)^2$

Con $x_o = 0$, $v_o = 0$, $a_o = 2m/s^2$, $t_o = 5s$

$$x(t) = \frac{1}{2}a_o(t-5)^2 \Rightarrow x(t) = (t-5)^2$$

$$v(t) = v_0 + a_0(t - t_0) \Rightarrow v(t) = 2(t-5)$$

Las ecuaciones para los tramos B y C tu las puedes deducir de los resultados obtenidos en c) y d), donde basta reemplazar los valores en las funciones de *t*.

Ejemplo 3. *Un auto ingresa en Concepción al puente nueva a San Pedro con una rapidez de 54 km/h, la que mantiene constante mientras recorre el puente. En el mismo instante en San Pedro otro auto ingresa lentamente al puente con una rapidez inicial de 10.8 km/h hacia Concepción, acelerando a 1 m/s*^{2}*. Si la longitud del puente es de 1838 m. Calcular a) la posición donde se cruzan, b) la rapidez del auto de San Pedro en el instante en que se cruzan, ¿qué comentario puede hacer de este resultado?*

Solución: Datos: $t_{oA} = t_{oB} = 0,\ x_{oA} = 0,\ x_{oB} = 1838m$

$$v_{0A} = 54\frac{km}{h}\times\frac{1h}{3600s}\times\frac{1000m}{1km} = 15\ m/s\ ,\ a_A = 0$$

$$v_{oB} = 10{,}8\ km/h = 3\ m/s\ ,\ a_B = 1m/s^2$$

El siguiente esquema muestra el sistema de referencia elegido:

a) El movimiento es en una dimensión con $a = cte$, las ecuaciones para cada móvil (A en Concepción, B en San Pedro) son:

$$x_A = x_{0A} + v_{0A}(t-t_0) + \frac{1}{2}a_A(t-t_0)^2 \Rightarrow x_A = v_{0A}t \Rightarrow x_A = 15t$$

$$v_A = v_{0A} + a_A(t-t_0) \Rightarrow v_A = v_{0A} \Rightarrow v_A = 15\ m/s$$

$$x_B = x_{0B} + v_{0B}(t-t_0) + \frac{1}{2}a_B(t-t_0)^2 \Rightarrow x_B = 1838 - 3t - \frac{1}{2}t^2$$

$$v_B = v_{0B} + a_B(t-t_0) \Rightarrow v_B = -3 - t$$

Cuando se cruzan: $x_A = x_B$, entonces

$$15t = 1838 - 3t - 0{,}5t^2 \Rightarrow 0.5t^2 + 18t - 1838 = 0$$

$$t = \frac{-18 \pm \sqrt{18^2 + 4(0.5)(1838)}}{1} \Rightarrow t_1 = 45{,}2s,\quad t_2 = -40{,}6s$$

$$\therefore x(45.2) = 15(45.2) = 678m$$

b) $v_B(45.2) = -3 - 45.2 = -48{,}2m/s = 173.5\ km/h$

El automóvil de San Pedro no puede acelerar durante todo ese tiempo, porque alcanzarían rapideces muy altas, superando en mucho la máxima permitida y posible de alcanzar.

2.5 CUERPOS EN CAÍDA LIBRE.

Un caso particular de movimiento en una dimensión, es aquel de los objetos que se mueven libremente en dirección vertical cerca de la superficie de la Tierra, que se conoce como movimiento de caída libre. Galileo (1564 – 1642), físico y astrónomo italiano, fue el primero en estudiar el movimiento de caída libre, al observar que dos cuerpos diferentes, al dejarse caer desde la torre inclinada de Pisa, llegaban al suelo casi al mismo tiempo.

Experimentalmente se demuestra que todos los cuerpos que se dejan caer cerca de la superficie de la Tierra, lo hacen con una aceleración aproximadamente constante. Esta aceleración, que se llama aceleración de gravedad, es producida por una fuerza que existe entre cuerpos con masa, llamada fuerza de atracción gravitacional, cuyo origen será explicado posteriormente.

La aceleración de gravedad, que se denota por ***g*,** es un vector que apunta hacia el centro de la Tierra, su magnitud aumenta levemente al aumentar la latitud, es decir desde el ecuador hacia los polos, y disminuye al aumentar la altura sobre la superficie terrestre. Su valor medio en la superficie de la Tierra es aproximadamente de 9.8 m/s^2.

Se dice que un objeto está en caída libre cuando se mueve bajo la influencia sólo de la aceleración de gravedad, despreciando la resistencia (es otra fuerza que se resiste al movimiento y que también será estudiada más adelante) que el aire opone a los cuerpos en movimiento, sin importar la velocidad inicial del objeto. ***Todos los cuerpos que se lanzan hacia arriba o hacia abajo, o se dejan caer, lo hacen libremente una vez que se dejan en libertad. La aceleración que adquieren es siempre la aceleración de gravedad, vertical hacia abajo, cualquiera sea la dirección inicial del movimiento.***

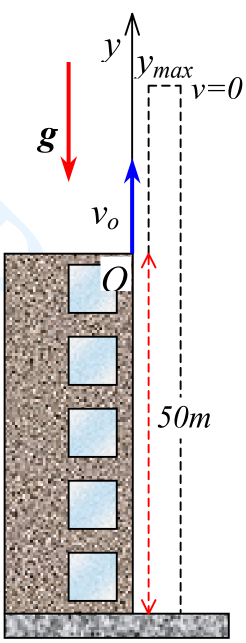
Como el movimiento de caída libre es en una dimensión, con aceleración constante, se puede adoptar como dirección del movimiento al eje vertical y. Por lo tanto se pueden aplicar las ecuaciones para el movimiento en una dimensión, tomando al eje y en la dirección del movimiento de caída, por convención positivo hacia arriba. Con esta convención, un movimiento de caída libre de ascenso o de descenso tiene una aceleración g negativa. También se debe tener en cuenta que si el cuerpo asciende (desciende) su velocidad será positiva (negativa) en este sistema de referencia. De está forma las ecuaciones de movimiento 2.7 y 2.8 se transforman en las ecuaciones para caída libre:

$$\boxed{\vec{y} = \vec{y}_o + \vec{v}_{oy}(t - t_o) - \frac{1}{2}\vec{g}(t - t_o)^2} \qquad (2.9)$$

$$\boxed{\vec{v}_y = \vec{v}_{oy} - \vec{g}(t - t_o)} \qquad (2.10)$$

***Ejemplo**: Una alumna de la Infancia, lanza una piedra hacia arriba desde la terraza de un edificio de 50 m de alto, con una rapidez inicial de 20 m/s. Cuando está cayendo la piedra pasa justo por el costado del edificio. Calcular a) el tiempo para que la piedra alcance su altura máxima, b) la altura máxima, c) el tiempo que tarda en pasar por el punto inicial, d) la velocidad de la piedra en ese instante, e) el tiempo que tarda en llegar al suelo, f) la velocidad en ese instante.*

Solución: Considerando un sistema de referencia que se muestra en el esquema, con el eje y positivo vertical hacia arriba y origen $y_o = 0$ donde comienza el movimiento de la piedra, con $t_o = 0$ y $v_o = 20\ m/s$.



a) Cuando la piedra alcanza la máxima altura $v = 0$:

$$v(t) = v_o - gt = 0 \Rightarrow v_o = gt \Rightarrow t = \frac{20m/s}{10m/s^2} = 2s$$

b) Se pide evaluar $y(t)$ para $t = 2\ s$

$$\vec{y} = \vec{y}_o + \vec{v}_{oy}(t - t_o) - \frac{1}{2}\vec{g}(t - t_o)^2 \Rightarrow\ y = v_o t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$y_{max} = y(2) = (20m/s)(2s) - \frac{1}{2}(10m/s^2)(2s)^2 = 20m$$

c) Cuando pasa por el punto inicial $y = 0 \Rightarrow$

$$y = v_o t - \frac{1}{2} g t^2 = 0 \Rightarrow \left(v_o - \frac{1}{2} g t \right) t = 0 \Rightarrow$$

$$t_1 = 0 \;\; y \;\; v_o - \frac{1}{2} g t = 0 \Rightarrow t = \frac{2 v_o}{g} = \frac{(2)(20)}{10} = 4s$$

d) Hay que evaluar v para $t = 4s$

$$v(t) = v_o - gt \Rightarrow v(4) = 20 - (10)(4) = -20 m/s$$

e) En esta posición $y = -50\ m \Rightarrow$

$$y = v_o t - \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow -50 = 20t - 5t^2$$

$$t^2 - 4t - 10 = 0 \Rightarrow t_1 = 5.7s \;\; y \;\; t_2 = -1.7s$$

Se descarta el tiempo negativo, porque físicamente no es posible.

f) $v(t) = v_o - gt \Rightarrow v(5.7) = 20 - (10)(5.7) = -37 m/s$

PREGUNTAS (A LOS PROBLEMAS NO LE DAREMOS BOLA, paque' hacernos mala sangre**).**

Hacérselas ustedes mismas, cosas como por ejemplo:

1. ¿Qué es la posición, el tiempo?

2. ¿Qué es el desplazamiento?

3. ¿Cuál es el significado físico de la velocidad, de la aceleración?

4. ¿Cómo se hace en la vida real para describir el movimiento?

5. ¿Cuánto demora en caer una gota de agua durante una lluvia común y silvestre?

6. ¿Qué cosa es g?

Etc, así hay miles...