

CAPITULO 5. EL SISTEMA COMPLETO DE ECUACIONES.

ECUACIÓN DE CONTINUIDAD.

La conservación de la masa es un principio fundamental en mecánica de fluidos. Afirma que la masa no puede ser creada ni destruida, por lo que la masa de una parcela de fluidos se debe conservar.

Matemáticamente, el principio de conservación de la masa se expresa con la ecuación de continuidad. Si dm es la masa contenida en un volumen dV de densidad, la masa total M en V es:

$$M = \int_V \rho dV$$

La cantidad de masa que deja el volumen V a través de la superficie dA en un intervalo de tiempo dt es $(\rho \vec{v} \cdot \hat{n} dA)dt = dm$. Esta expresión se puede deducir con la ayuda del siguiente esquema, que es una vista de lado de un área dA de la superficie A del volumen.

ESQUEMA

De la figura se observa que el volumen contenido en las cajas con lados vdt y $(vcos\theta)dt$ es el mismo, y como:

$$(v \cos \theta)dt = |\vec{v}| \hat{n} | \cos \theta dt = \vec{v} \cdot \hat{n} dt$$

el volumen es

$$dV = (\vec{v} \cdot \hat{n} dt) dA,$$

y la masa es

$$dm = \rho dV = \rho \vec{v} \cdot \hat{n} dA dt$$

El flujo de masa F_m a través de la superficie A en un tiempo dt es.

$$F_m = \int_A \rho (\vec{v} \cdot \hat{n} dA) dt$$

La variación de masa M en el volumen V

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

donde se puede diferenciar el integrando ya que, el volumen es arbitrario, pero fijo. Por el principio de conservación de la masa, la pérdida de masa dentro de V debe ser igual al flujo neto de masa en el intervalo dt , así:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial M}{\partial t} dt &= F_m \Rightarrow \\ -\frac{\partial M}{\partial t} dt &= \left(\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dt = \int_A \rho \vec{v} \cdot \hat{n} dA dt \Rightarrow \\ \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_A \rho \vec{v} \cdot \hat{n} dA &= 0 \end{aligned}$$

Usando el teorema de la divergencia, se puede escribir:

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_V \nabla \cdot (\rho \vec{v}) dV = 0$$

Como el volumen es arbitrario y vale la hipótesis del continuo, se obtiene:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0$$

que es la ecuación de continuidad, indica que la densidad en un lugar fijo del espacio cambia debido a la divergencia de momentum. Al término $\nabla \cdot (\rho \vec{v})$ se le llama también divergencia de masa.

Otra forma de escribir la ecuación de continuidad es desarrollando la divergencia de masa

$$\nabla \cdot (\rho \vec{v}) = \rho \nabla \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \nabla \rho$$

entonces se puede reemplazar en la ecuación de continuidad

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \vec{v} &= 0 \Rightarrow \\ \frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \vec{v} &= 0 \end{aligned}$$

que dice que el cambio de la densidad de una parcela con el tiempo es proporcional a la divergencia de la velocidad, es decir al cambio de volumen de la parcela de fluido.

La última ecuación de continuidad se puede escribir también en la forma:

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = -\nabla \cdot \vec{v}$$

Como

$$M = \rho V \Rightarrow \frac{dM}{dt} = \rho \frac{dV}{dt} + V \frac{d\rho}{dt} \quad / \frac{1}{\rho V dt}$$

$$\frac{1}{M} \frac{dM}{dt} = \frac{1}{V} \frac{dV}{dt} + \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = - \frac{1}{V} \frac{dV}{dt}$$

Ya que $dM/dt = 0$ pues la parcela conserva su masa, reemplazando en la ecuación de continuidad queda:

$$-\frac{1}{V} \frac{dV}{dt} = -\nabla \cdot \vec{v} \Rightarrow$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{1}{V} \frac{dV}{dt}$$

que dice que la divergencia de la velocidad representa la tasa de cambio del volumen de la parcela por unidad de volumen.

Si la densidad de una parcela de fluido en movimiento no cambia, $d\rho/dt = 0$, pero esto no significa que la densidad sea constante, ya que, ni $d\rho/dt$ ni $\nabla\rho$ son necesariamente cero.

Se define:

Fluido incomprensible:

Es aquel en el cual la densidad de una parcela no es afectada por cambios de presión isotérmicos.

Fluido homogéneo:

Es aquel que tiene una densidad constante y uniforme.

Para un fluido incomprensible $\frac{d\rho}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dV}{dt} = 0$ y la ecuación de continuidad se reduce a:

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0$$

Así en un fluido incompresible, o no divergente, el volumen de la parcela se puede deformar, pero no cambia su valor numérico.

En la atmósfera, para flujos en gran escala, la divergencia típica es del orden de $\nabla \cdot \vec{v} \approx 10^{-6} s^{-1}$, esto es $\frac{d\rho}{\rho dt} \approx 10^{-6} s^{-1}$ por lo que la atmósfera puede ser tratada como un fluido incompresible, aunque de hecho, no lo es.

LA ECUACIÓN DE ESTADO

Para cualquier substancia homogénea (sólido, líquido o gas) existe una relación definida entre la presión, volumen específico y temperatura, tal que:

$$F(p, \alpha, T) = 0.$$

donde $\alpha = V/M$ es el volumen específico $1/\rho$. Esta relación se llama ecuación de estado y existe para cada substancia, aunque no es posible escribir una expresión analítica simple en el caso general.

Gas ideal:

Es un gas para el cual $p\alpha_m/T = R^*$. Aquí R^* se llama constante universal del gas, $R^* = 8314.3 \text{ J/(kgmol K)}$, y α_m es el volumen molar específico, $\alpha_m = V/n$, con n el número de moles del gas.

Por definición, la ecuación de estado de un gas ideal es:

$$p\alpha_m = R^*T$$

O bien:

$$pV = nR^*T$$

Si p_0 , V_0 y T_0 son los valores en condiciones normales (1 atm, 0°C), para un mol de gas se tiene:

$$V_0 = 1\text{mol} \cdot \frac{R^*T_0}{p_0} = 1\text{mol} \cdot \frac{8314.3(\text{J/kg mol K}) \times 273.16\text{K}}{1.013 \times 10^5 \text{Pa}}$$

$$V_0 = 0.0224 \text{ m}^3 = 22.4 \text{ lt.}$$

es el volumen que ocupa un gramo mol de cualquier gas en condiciones normales y se llama volumen molar.

Si PM es el peso molecular del gas y M la masa total del gas, entonces el número de moles n de gas presente, se relaciona a través de:

$$M = n(PM)$$

Ahora si M_0 es la masa de una molécula, y si N_0 es el número total de moléculas presente, la masa total M del gas es:

$$M = n(PM) = M_0 N_0 \Rightarrow n = \frac{M_0 N_0}{PM}$$

El número N_0 es una constante universal llamado número de Avogadro, es igual al número de moléculas de un mol de substancia, su valor es:

$$N_0 = 6.0220943 \times 10^{23}/\text{mol} \pm 6.3 \times 10^{17}$$

Así un gramo - mol de cualquier gas contiene 6.02×10^{23} moléculas.

Se puede extender la ecuación de estado de un gas ideal a un gas cualquiera en la forma:

$$p\alpha = RT$$

donde R es la constante del gas, tiene un valor diferente para distintos gases.

Como $\alpha = 1/\rho = V/M$

$$\begin{aligned} pV &= MRT \Rightarrow \\ p &= \rho RT \end{aligned}$$

Ahora, como $M = n(PM)$, entonces

$$PV = n(PM)RT = n(PMR)T$$

Y como

$$\begin{aligned} PV &= nR^*T \Rightarrow nR^*T = n(PMR)T \Rightarrow \\ R &= \frac{R^*}{PM} \end{aligned}$$

La constante del gas específico es igual a la constante universal del gas dividido por el peso molecular del gas considerado. La atmósfera es una mezcla de gases, y el valor de la constante del aire R_{aire} depende de su composición. Para aire seco se denota por R_d y como el peso molecular del aire seco es $PM = 28.9644$, su valor es

$$R_d = 287,05 \text{ J/kg K}$$

LA ECUACIÓN DE ENERGÍA TERMODINÁMICA.

La primera ley de la termodinámica es una afirmación del principio de conservación de la energía, y dice que “el flujo neto de energía a través del límite de un sistema es igual al cambio neto en la energía del sistema”, es decir la energía no puede ser creada ni destruida.

Principio de conservación de la energía: La variación de la energía total de un sistema es igual a la suma de calor transferido al sistema y el trabajo hecho sobre el sistema.

Si e_t es la energía específica total de un sistema, dq el calor agregado a una masa unitaria y dw el trabajo, positivo cuando el sistema realiza trabajo sobre su ambiente, negativo en caso contrario, entonces del principio de conservación de energía se expresa en la forma

$$de_t = dq - dw.$$

La e_t se compone de muchas formas de energía, las más comunes en fluidos geofísicos son:

$$de_t = du + d\left(\frac{1}{2}v^2\right) + d\phi$$

u :	Energía interna
$\frac{1}{2}v^2$:	Energía cinética (mecánica)
ϕ :	Energía potencial (mecánica)

En nuestro caso nos interesan sólo las transformaciones para un sistema en equilibrio. Entonces el calor entregado al sistema es usado sólo para hacer trabajo contra el medio y para cambiar la temperatura del sistema, es decir para cambiar su energía interna. Así $de_t = du$ solamente, y la expresión de la primera ley de la termodinámica toma la forma:

$$de_t = du = dq - dw \Rightarrow$$

$$dq = du + dw$$

Repasando los conceptos de termodinámica, se tiene que para un gas ideal

$$du = c_v dT$$

Y el trabajo termodinámico por unidad de masa es

$$dw = pd\alpha \quad dW = pdV$$

por lo que la primera ley de la termodinámica se transforma en:

$$dq = c_v dT + p d\alpha$$

También se sabe que $c_p = c_v + R$, y de la ecuación de estado

$$p\alpha = RT \Rightarrow$$

$$p d\alpha + \alpha dp = R dT$$

reemplazando en dq , queda:

$$dq = c_v dT + R dT - \alpha dp = (c_v + R) dT - \alpha dp \Rightarrow$$

$$dq = c_p dT - \alpha dp$$

Para aire seco, se tiene:

$$c_p = 1004,64 \frac{J}{kgK} = \frac{7}{2} R_d$$

$$c_v = 717,6 \frac{J}{kgK} = \frac{5}{2} R_d$$

Generalmente la ecuación (o primera ley) de la termodinámica se escribe en forma más usual tomando su derivada temporal. Si dq/dt es la tasa de calentamiento por unidad de masa debido a radiación, conducción o convección, entonces:

$$\frac{dq}{dt} = c_p \frac{dT}{dt} - \alpha \frac{dp}{dt}$$

Proceso adiabático: Un proceso durante el cual un sistema no intercambia calor con el ambiente.

Para un gas ideal $dq=0$ y:

$$0 = c_v dT + p d\alpha$$

$$0 = c_p dT - \alpha dp \Rightarrow$$

$$dT = -\frac{p}{c_v} d\alpha = \frac{\alpha}{c_p} dp \Rightarrow$$

$$\frac{dp}{p} = -\frac{c_p}{c_v} \frac{d\alpha}{\alpha} \Rightarrow d(\ln p) = d(\ln 1/\alpha^{c_p/c_v}) \Rightarrow$$

$$p\alpha^{c_p/c_v} = cte$$

Usando la ecuación de estado, se obtienen:

$$Tp^{-(1-c_v/c_p)} = cte$$

$$Tp^{-R/c_p} = cte$$

$$T\alpha^{c_p/c_v-1} = cte$$

Un proceso que ocurre normalmente en la atmósfera es aquel en que una parcela de aire se lleva adiabaticamente desde un nivel donde la presión es p_1 la temperatura y T_1 a otro nivel con valores p_2 y T_2 , entonces:

$$T_1 p_1^{-R/c_p} = T_2 p_2^{-R/c_p}$$

Si una parcela de aire seco fuera expandida o comprimida adiabáticamente al nivel de presión de 1000 Hpa = p_1 , tendría en ese nivel una temperatura θ , llamada **temperatura potencial**, entonces

$$\Theta p_0^{-R/c_p} = T p^{-R/c_p} \Rightarrow$$

$$\Theta = T \left(\frac{p_0}{p} \right)^{\frac{R}{c_p}} ; \quad p_0 = 1000 \text{ hPa}$$

La ventaja de definir Θ es que una propiedad conservativa es un proceso adiabático.

Entropía.

Tomando la primera ley de la termodinámica y dividiendo por T, se tiene:

$$\frac{dq}{T} = c_p \frac{dT}{T} - \frac{\alpha}{T} dp$$

De la ecuación de estado $\alpha/T = R/p$, reemplazando se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{dq}{T} &= c_p \left(\frac{dT}{T} - \frac{R}{c_p} \frac{dp}{p} \right) = c_p \frac{d\theta}{\Theta} \\ \Rightarrow \frac{dq}{T} &= d(c_p \ln \Theta) \end{aligned}$$

La cantidad $d(c_p \ln \Theta)$ es una diferencial exacta, por lo tanto dq/T también debe serlo, por lo que debe ser la diferencial de alguna propiedad del sistema que es sólo función de estado. Esta propiedad se llama la entropía específica s, entonces

$$ds = \frac{dq}{T} = d(c_p \ln \Theta)$$

En un proceso adiabático, $dq = 0$ y $d\Theta = 0$, entonces $ds = 0$, la entropía es constante en un proceso adiabático, que a su vez es isentrópico.

La segunda ley de la termodinámica afirma que el intercambio de calor en un proceso reversible es

$$dq = Tds$$

Combinando con la primera ley para un gas ideal

$$Tds = c_p dT - \alpha dp$$

dividiendo por T y usando la ecuación de estado, luego tomando la derivada temporal, se tiene:

$$\frac{ds}{dt} = c_p \frac{d(\ln T)}{dt} - R \frac{d(\ln p)}{dt}$$

que es una forma alternativa de la Primera ley de la termodinámica (forma entrópica).

También se puede escribir en función de la temperatura potencial Θ para aire seco:

$$\frac{ds}{dt} = c_p \frac{d(\ln \Theta)}{dt}$$

Es otra forma de la ecuación termodinámica; dice que es un proceso reversible la toma de cambio fraccional de Θ es proporcional a la tasa de cambio de la entropía. Una parcela conserva su entropía siguiendo al movimiento a lo largo de una superficie isentrópica $\Theta=\text{cte}$.

EL SISTEMA DE ECUACIONES.

La descripción del movimiento del fluido está basada en las leyes físicas de conservación del momentum, de la masa y de la energía, a las cuales se agrega la ecuación de estado para el caso de un gas ideal, que se expresan matemáticamente por las ecuaciones:

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{v}}{dt} + 2\vec{\Omega} \times \vec{v} + \frac{1}{\rho} \nabla p - \vec{g} &= \vec{F}_R \\ \frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \vec{v} &= 0 \\ \frac{dq}{dt} &= c_v \frac{dT}{dt} + p \frac{d\alpha}{dt} \\ p\alpha &= RT\end{aligned}$$

Este se conoce como el conjunto de **ecuaciones primitivas**. Suponiendo conocida la fuerza de fricción \vec{F}_R , y que se puede especificar dq/dt , entonces este sistema constituye un conjunto de seis ecuaciones para las seis variables dependientes u, v, w, p, ρ y T , y las cuatro variables independientes x, y, z, t . Aplicadas a la atmósfera, constituyen el conjunto de ecuaciones de pronóstico del tiempo, usadas en el problema de la predicción. Todas las ecuaciones son de primer orden en el tiempo, excepto la ecuación de estado que es directa.

El sistema puede ser resuelto imponiendo condiciones iniciales y de contorno. Su solución analítica no es conocida, ya que las ecuaciones diferenciales parciales son no lineales. Se pueden obtener soluciones aproximadas por métodos numéricos. Pero surge otra dificultad fundamental: no se conocen las variables dependientes (u, v, w, p, ρ, T) como funciones continuas de (x, y, z, t) , ni aún en el instante inicial. Los análisis de los mapas intentan proporcionar su conocimiento en forma geográfica. Para aplicar los métodos numéricos se debe imaginar que se tiene una red de observaciones suficientemente densa que cubra todo el fluido como un retículo tridimensional. El problema fundamental es: ¿cómo construimos una distribución continua de parámetros atmosféricos (u oceánicos) de los datos medidos en puntos ubicados al azar?