CAPITULO 9. LEY DE GRAVITACION UNIVERSAL.

9.1 LA LEY Y LA FUERZA GRAVITACIONAL.

La ***Ley de Gravitación Universal*** fue descubierta por Newton, cuando le cayó una manzana en la cabeza mientras hacia una siesta debajo de un manzano. Por este hecho Newton le pregunto al manzano "¿manzano, si la manzana cae, quizá todos los cuerpos en el Universo se atraen entre sí de la misma forma como la manzana fue atraída por la Tierra?". Como el manzano nada le respondió, Newton comenzó a trabajar sobre eso hasta que descubrió la *Ley de Gravitación Universal*, que publicó en 1686 en sus *Mathematical Principles of Natural Philosophy*. Se puede enunciar de la siguiente forma:

"Toda partícula material del universo atrae a cualquier otra partícula con una fuerza directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa"

Si las partículas que tienen masas m_1 y m_2 están separadas una distancia r medida desde sus centros, como se ve en la figura 9.1, entonces, de acuerdo a la ley de gravitación universal, la fuerza de atracción gravitacional $\mathbf{F}_G$ ejercida por la masa m_1 sobre la masa m_2 es:

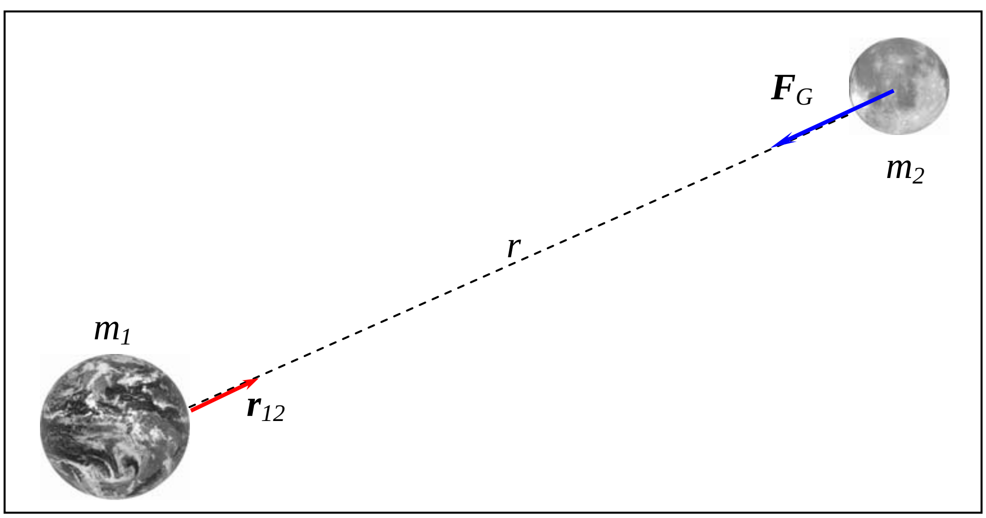

Figura 9.1

$$\boxed{\vec{F}_G = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{r}_{12}} \qquad (9.1)$$

Su magnitud es:

$$F_G = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

La constante de proporcionalidad G se llama ***Constante de Gravitación Universal***, y $\hat{r}_{12}$ es un vector unitario radial dirigido desde la masa m_1 a la masa m_2. El valor de G, que se determina experimentalmente, y su unidad de medida en el SI es $6.672 \times 10^{-11}\ N\ m^2/kg^2$. El signo menos en la $\boldsymbol{F}_G$ indica que la fuerza es de atracción, dirigida desde m_2 hacia m_1, es decir es opuesta a la dirección radial hacia fuera, desde la masa m_1 que ejerce la fuerza sobre m_2; en los cálculos su valor numérico es siempre positivo.

En este punto se debe tener presente que:

- La constante universal G no se debe confundir con el vector $\boldsymbol{g}$, que ni es universal ni es constante.
- La ley de gravitación universal no es ecuación de definición de ninguna de las variables físicas contenidas en ella.
- La ley de gravitación universal expresa la fuerza entre partículas. Si se quiere determinar la fuerza gravitacional entre cuerpos reales, se los debe considerar formado por un conjunto de partículas y usar cálculo integral.
- Las fuerzas de gravitación entre partículas son parejas de acción y reacción.

9.2 FUERZA GRAVITACIONAL Y PESO.

La fuerza con que la Tierra atrae a los cuerpos cerca de la superficie terrestre se definió como el peso del cuerpo, $\boldsymbol{P} = m\boldsymbol{g}$. Esta es la fuerza gravitacional $\boldsymbol{F}_G$ entre el cuerpo de masa m y la Tierra de masa M_T, separados una distancia entre sus centros $r = R_T + z$, donde R_T es el radio de la Tierra y z es la altura de m sobre el suelo. Igualando las expresiones de las fuerzas $\boldsymbol{P}$ y $\boldsymbol{F}_G$ se obtiene:

$$mg = G\frac{mM_T}{(R_T + z)^2}$$

$$g = G\frac{M_T}{(R_T + z)^2}$$

Esta ecuación permite calcular el valor de la aceleración de gravedad g a cualquier altura z sobre la superficie, ya que se conoce G, la M_T y el R_T. De esta ecuación se observa que g disminuye con la altura. En la tabla 9.1 se muestra la variación de g con la latitud ϕ y con la altura z (en la Universidad de Concepción, el gravímetro del Observatorio Geodésico Transportable Integrado, TIGO, ubicado allá arriba en los cerros permite medir las variaciones de g en el noveno decimal, estas variaciones son principalmente por efecto de la atracción gravitacional de la Luna).

TABLA 9.1.

Variación de g con la latitud ϕ en $z = 0$		Variación de g con la altura z en $\phi = 45^o$	
ϕ (º)	g (m/s²)	z (km)	g (m/s²)
0	9.78036	0	9.80616
10	9.78195	1	9.803
20	9.78641	5	9.791
30	9.79329	10	9.775
40	9.80171	20	9.745
45	9.80616	30	9.708
50	9.81071	100	9.598
60	9.81719	1000	7.33
70	9.82368	5000	3.08
80	9.83016	10000	1.49
90	9.83208	∞	0

La aceleración de gravedad ***g*** también varia con la latitud debido a que la Tierra no es una esfera, es un elipsoide achatado levemente en los polos, de manera que el radio ecuatorial es 21 km mayor que el radio polar, valor pequeño comparado con el radio medio de la Tierra de 6367.47 km. La Tierra no es un cuerpo rígido, tiene un comportamiento plástico. Por efecto de la rotación terrestre, la aceleración centrípeta disminuye desde el ecuador, donde es máxima, hacia los polos, donde se anula, produciendo una mayor fuerza centrípeta en zonas ecuatoriales, que "estira" a la Tierra hacia afuera más que en zonas polares, por eso la Tierra es achatada en los polos. Esto tiene como consecuencia que la aceleración de gravedad no apunte directamente hacia el centro de la Tierra, sino que está levemente desviada de la dirección vertical. La desviación máxima que tiene g de la vertical es de 11'40" a 45º de latitud, y la variación del valor de g en superficie es menos que 0.5 %, por lo que se puede considerar constante.

***Ejemplo 9.1**: Un satélite de 300 kg describe una órbita circular alrededor de la Tierra a una altura igual al radio terrestre (figura 9.2). Calcular a) la rapidez orbital del satélite, b) su período de revolución, c) la fuerza gravitacional sobre el satélite, d) comparar su peso en la órbita con su peso en la superficie de la Tierra.*

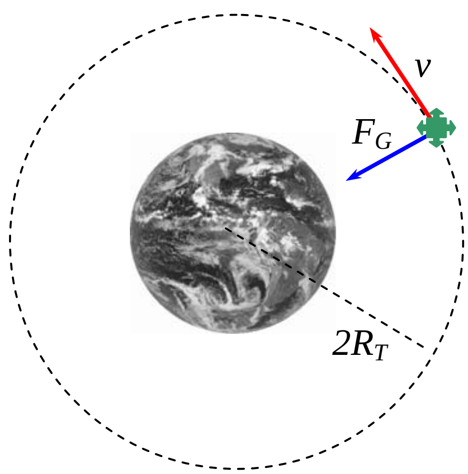

Figura 9.2 Ejemplo 9.1

a) El satélite de masa m_S, se mantiene en órbita por la acción de la fuerza gravitacional, que actúa como fuerza centrípeta, es decir $F_G = F_C$, entonces se igualan las expresiones de ambas fuerzas:

$$F_C = m_S \frac{v^2}{r}$$

$$F_G = G \frac{M_T m_S}{r^2}$$

Como $r = 2R_T$, reemplazando

$$F_G = F_C \Rightarrow \frac{GMm}{4R_T^2} = m \frac{v^2}{2R_T} \Rightarrow v^2 = \frac{GM_T}{2R_T}$$

$$\text{Datos:} G = 6.7x10^{-11} \frac{Nm^2}{Kg^2},\ M_T = 6x10^{24} Kg,\ R_T = 6.37x10^6 m$$

$$v = \sqrt{\frac{(6.7x10^{-11})\text{Nm}^2/\text{kg}^2 (6x10^{24})kg}{2 \times 6.37x10^6 m}} = 5600 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

b) El satélite completa una vuelta en torno a la Tierra a la altura de $2R_T$ moviéndose con la rapidez anterior, entonces:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{2\pi r}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi(2R_T)}{v}$$

$$\Delta t = \frac{4\pi \times 6{,}37x10^6 m}{5600\text{m/s}} = 14294s \Rightarrow \Delta t = 3.97 horas$$

c) La fuerza gravitacional en la órbita corresponde al peso del satélite en ese lugar, se calcula como sigue:

$$F = \frac{6.7\times10^{-11}\,\mathrm{Nm}^2/\mathrm{k}g^2 \times 6\times10^{24}\,kg\times300kg}{\left(2\times6.37x10^6\,m\right)^2}$$

$$F = 740\ N$$

d) Para hacer esta comparación, calculamos su peso en tierra.

$$P = mg = 300x9.8 = 2940N \Rightarrow$$

$$\frac{P_{z=0}}{P_{z=2R}} = \frac{2940}{740} \Rightarrow P_{z=2R} = 0{,}25P_{z=0}$$

9.3 ENERGIA POTENCIAL DE LA FUERZA GRAVITACIONAL.

Una partícula de masa *m* que se encuentre sobre la superficie terrestre, moviéndose entre dos puntos cualesquiera, esta bajo la influencia de la fuerza gravitacional, cuya magnitud es:

$$F_G = \frac{GM_T m}{r^2}$$

El cambio de energía potencial de la partícula de masa *m* se define como el trabajo negativo realizado por la fuerza gravitacional, en este caso:

$$\Delta E_P = E_{Pf} - E_{Pi} = -W = -\int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F}_G \cdot d\vec{r}$$

Reemplazando en esta expresión la fuerza gravitacional, para calcular la energía potencial gravitacional de la partícula de masa *m*, se obtiene:

$$E_{gf} - E_{gi} = \int_{r_i}^{r_f} GM_T m \frac{dr}{r^2} = GM_T m \left(-\frac{1}{r} \Big|_{ri}^{rf} \right)$$

$$E_{gf} - E_{gi} = -GM_T m \left(\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_i} \right)$$

Como el punto de referencia inicial para la energía potencial es arbitrario, se puede elegir en $r = \infty$, donde la fuerza gravitacional (y la aceleración de gravedad) es cero. Con esta elección se obtiene la energía potencial gravitacional general para una partícula de masa *m* ubicada a una altura *r* medida desde el centro de la Tierra:

$$\boxed{E_g(r) = -\frac{GM_T m}{r}} \qquad (9.2)$$

La energía potencial gravitacional entre partículas varia en $1/r$, y es negativa porque la fuerza gravitacional es de atracción y se ha tomado la energía potencial como cero cuando la separación entre las partículas es infinita. Como la fuerza gravitacional es de atracción, un agente externo debe realizar trabajo positivo para aumentar la separación entre las partículas. El trabajo produce un aumento de la energía potencial cuando las dos partículas están separadas, esto significa que E_g se vuelve menos negativa cuando *r* aumenta.

Esta ecuación es general y vale para cualquier par de partículas de masas m_1 y m_2 separadas una distancia *r*, y extenderse a un sistema que contenga varias partículas, en ese caso la energía total del sistema es la suma sobre todos los pares de partículas, entonces para dos partículas se tiene:

$$E_g(r) = -\frac{Gm_1 m_2}{r}$$

Ejemplo 9.2: *calcular la energía total para un satélite de masa m, que se mueve en una órbita circular con rapidez tangencial constante v, a una altura r desde el centro de la Tierra (figura 9.3).*

Solución: la energía total del satélite es la suma de la energía cinética más la potencial, que es constante, reemplazando los valores correspondientes de cada energía, se tiene:

$$E = E_c + E_P = cte.$$

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r}$$

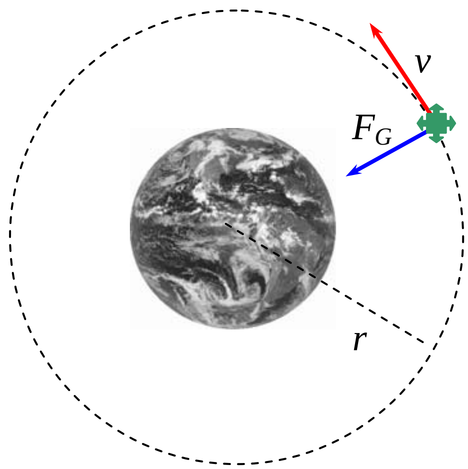

Figura 9.3. Ejemplo 9.2.

Pero se debe calcular la *v* del satélite, como la órbita es circular aplicando la segunda ley de Newton al satélite de masa *m*, considerando que la fuerza gravitacional es la fuerza centrípeta necesaria para mantener al satélite en órbita,

$$F_G = F_C \Rightarrow \frac{GMm}{r^2} = ma_c = m\frac{v^2}{r} \Rightarrow$$

$$\frac{GMm}{2r} = \frac{1}{2}mv^2$$

reemplazando en la energía total *E*, queda:

$$E = \frac{GMm}{2r} - \frac{GMm}{r}$$

$$E = -\frac{GMm}{2r}$$

se observa que la energía total es negativa en el caso de órbitas circulares. Generalizando este resultado al sistema solar, ***la energía total del sistema Sol-planeta es una constante del movimiento.***

9.3.1 Velocidad de escape

Suponga que un objeto de masa *m* se lanza verticalmente hacia arriba desde la superficie terrestre con una velocidad v_i, como se muestra en la figura 9.4. Podemos utilizar consideraciones de energía para encontrar el valor mínimo de la velocidad inicial con la cual el objeto escapará del campo gravitacional de la Tierra. La ecuación anterior nos brinda la energía total del objeto en cualquier punto cuando se conocen su velocidad y distancia desde el centro de la Tierra. En la superficie de ésta $v_i = v$ y $r_i = R_T$. Cuando el objeto alcanza su altura máxima, $v_f = 0$ y $r_f = r_{máx}$. Debido a que la energía total del sistema es constante, al reemplazar estas condiciones se obtiene:

$$E_{ci} + E_{Pi} = E_{cf} + E_{Pf}$$

$$\frac{1}{2}mv_i^2 - \frac{GM_T m}{R_T} = 0 + -\frac{GM_T m}{r_{máx}}$$

Al despejar v^2_i se obtiene

$$v_1^2 = 2GM_T\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{r_{máx}}\right)$$

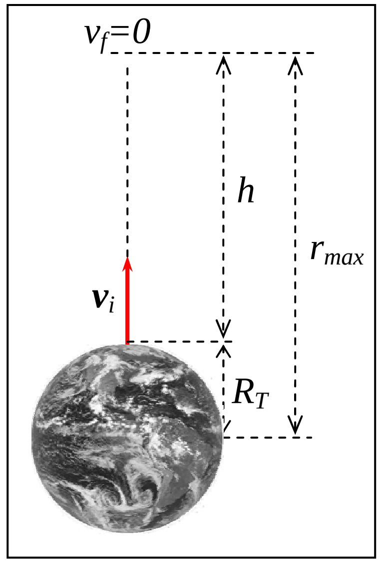

Figura 9.4

En consecuencia, si se conoce la velocidad inicial, esta expresión puede usarse para calcular la altura máxima *h*, puesto que sabemos que $h = r_{máx} - R_T$.

Ahora tenemos la posibilidad de calcular la velocidad mínima que el objeto debe tener en la superficie terrestre para escapar de la influencia del campo gravitacional del planeta. Al viajar a esta velocidad mínima, el objeto puede alcanzar *justamente* el infinito con una velocidad final igual a cero. Al establecer $r_{máx} = \infty$ en la ecuación anterior y tomando $v_i = v_{esc}$, que se llama la velocidad de escape, obtenemos

$$v_{esc} = \sqrt{\frac{2GM}{R_T}}$$

Advierta que esta expresión para v_{esc} es independiente de la masa del objeto. En otras palabras, una nave espacial tiene la misma velocidad de escape que una molécula. Además, el resultado es independiente de la dirección de la velocidad, siempre que la trayectoria no intersecte la Tierra.

Si al objeto se le da una velocidad inicial igual a v_{esc}, su energía total es igual a cero. Esto puede verse cuando $r = \infty$, la energía cinética del objeto y su energía potencial son ambas cero. Si v_i es más grande que v_{esc}, la energía total es mayor que cero y el objeto tiene un poco de energía cinética residual en $r = \infty$.

Por último, usted debe observar que las ecuaciones anteriores pueden aplicarse a objetos lanzados desde cualquier planeta. Es decir, en general, la velocidad de escape desde cualquier planeta de masa M y radio R es

$$v_{esc} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

Ejemplo 9.3. *Calcular la velocidad de escape de la Tierra para una nave espacial de 5000 kg y determine la energía cinética que debe tener en la superficie terrestre para escapar del campo gravitacional de la Tierra.*

Solución: Utilizando la ecuación anterior con $M_T = 5.98x10^{24}\ kg$ y $R_T = 6.37x10^6\ m$, obtenemos

$$v_{esc} = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}}$$

$$= \sqrt{\frac{2(6.67\times10^{-11} N\cdot m^2/kg^2)(5.98\times10^{24} kg)}{6.37\times10^6 m}}$$

$$v_{esc} = 11.2x10^3\ m/s$$

La energía cinética de la nave espacial es

$$E_C = \frac{1}{2}mv_{esc}^2 = \frac{1}{2}(5\times10^3 kg)(1.12\times10^4 m/s)^2$$

$$E_C = 3.14x10^{11}\ J$$

Las velocidades de escape para los planetas, la Luna y el Sol las puede calcular como ejercicio. Los valores varían de *1.1 km/s* para Plutón a casi *618 km/s* para el Sol. Estos resultados, junto con algunas ideas de la teoría cinética de los gases, explican por qué algunos planetas tienen atmósferas y otros no. Una molécula de gas tiene una energía cinética promedio que depende de su temperatura. Por consiguiente, las moléculas más ligeras, como el hidrógeno y el helio, tienen una velocidad promedio más alta que las partículas más pesadas a la misma temperatura. Cuando la velocidad de las moléculas más ligeras no es mucho menor que la velocidad de escape, una fracción significativa de ellas tiene oportunidad de escapar del planeta, dejándolo a este sin atmósfera. Este mecanismo explica también porque la Tierra retiene muy poco las moléculas de hidrógeno y helio en su atmósfera, en tanto que las moléculas mas pesadas como el oxigeno y nitrógeno no escapan tan fácilmente.

9.4 LAS LEYES DE KEPLER.

Los movimientos de los planetas, estrellas y otros cuerpos celestes han sido observados por la gente durante miles de años. En la antigüedad, los científicos consideraban a la Tierra como el centro del universo. Así el modelo llamado geocéntrico fue elaborado por el astrónomo griego Claudio Ptolomeo (100-170) en el segundo siglo DC y fue aceptado durante los siguientes 1400 años. En 1543, el astrónomo polaco Nicolás Copérnico (1473-1543) sugirió que la Tierra y los otros planetas giraban en órbitas circulares alrededor del Sol (el modelo heliocéntrico).

El astrónomo danés Tycho Brahe (1546-1601) hizo mediciones astronómicas más precisas por un periodo de 20 años y proporcionó una prueba rigurosa de los modelos alternativos del sistema solar. Es interesante observar que estas precisas observaciones sobre los planetas y de 777 estrellas visibles a simple vista se llevaron a cabo con un gran sextante y un compás, sin un telescopio, el cual aún no se había inventado.

El astrónomo alemán Johannes Kepler, quien era ayudante de Brahe, obtuvo los datos astronómicos de este último y empleó casi 16 años en tratar de desarrollar un modelo matemático para el movimiento de los planetas. El análisis completo se resume en tres enunciados, conocidos como las ***leyes de Kepler:***

1. Todos los planetas se mueven en órbitas elípticas con el Sol en uno de los puntos focales.

2. El radio vector trazado desde el Sol hasta un planeta barre áreas iguales en intervalos de tiempo iguales

3. El cuadrado del periodo orbital de cualquier planeta es proporcional al cubo del semieje mayor de la órbita elíptica.

Medio siglo después, Newton demostró que estas leyes son la consecuencia de una fuerza única que existe entre cualesquiera dos masas. La ley de la gravedad de Newton, junto con su desarrollo de las leyes del movimiento, entrega las bases para la solución matemática completa del movimiento de planetas y satélites.

9.4.1 La tercera ley de Kepler.

La tercera ley de Kepler puede predecirse a partir de la ley de gravitación universal. Considere un planeta de masa M_P que se mueve alrededor del Sol de masa M_S en una órbita circular, como en la figura 9.5. Puesto que la fuerza gravitacional ejercida sobre el planeta por el Sol es igual a la fuerza central necesaria para mantener al planeta moviéndose en un círculo,

$$\frac{GM_S M_P}{r^2} = \frac{M_P v^2}{r}$$

Sin embargo, la velocidad orbital del planeta es simplemente $2\pi r/T$ donde T es su periodo; por lo tanto, la expresión anterior se convierte en

$$\frac{GM_S M_p}{r^2} = \frac{(2\pi r/T)^2}{r}$$

$$\boxed{T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM_S}\right) r^3 = K_S r^3} \qquad (9.3)$$

donde K_S es una constante dada por

$$K_S = \frac{4\pi^2}{GM_S} = 2.97 \times 10^{-19}\, s^2/m^3$$

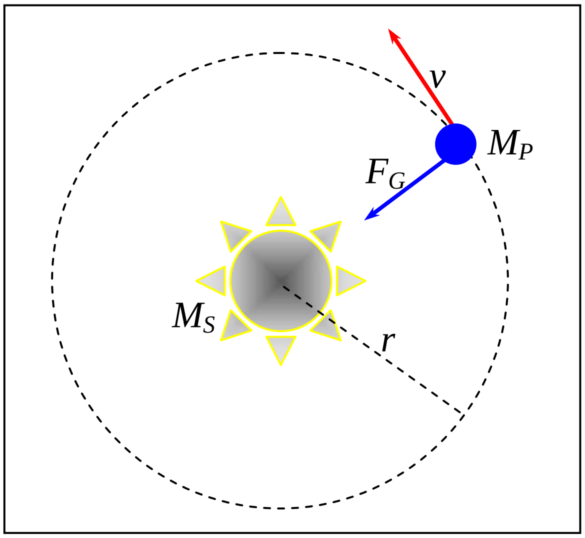

Figura 9.5.

La ecuación 9.3 es la tercera ley de Kepler. La ley es válida también para órbitas elípticas si sustituimos r por la longitud del semieje mayor, a (figura 9.6). Advierta que la constante de proporcionalidad, K_S es independiente de la masa del planeta. En consecuencia, la ecuación 9.3 es válida para cualquier planeta. Si hubiéramos considerado la órbita de un satélite alrededor de la Tierra, como la Luna, entonces la constante tendría un valor diferente, con la masa del Sol sustituida por la masa de la Tierra. En este caso, la constante de proporcionalidad es igual a $4\pi^2/GM_T$.

Ejemplo 9.4. *Calcular la masa del Sol a partir del hecho de que el periodo de traslación de la Tierra en torno al Sol es un año y la distancia de la Tierra al Sol es 1.496×10^{11} m.*

Solución: Usando la tercera ley de Kepler, despejando M_S, se obtiene:

$$M_S = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2}$$

Reemplazando los valores numéricos, con $T = 1\ año = 3.156x10^7 s$:

$$M_S = \frac{4\pi^2 \left(1.496 \times 10^{11} m\right)^3}{\left(6.67 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}\right)\left(3.156 \times 10^7 s\right)^2}$$

$$M_S = 1.99x10^{30}\ kg.$$

Advierta que el Sol tiene 333000 veces más masa que la Tierra.

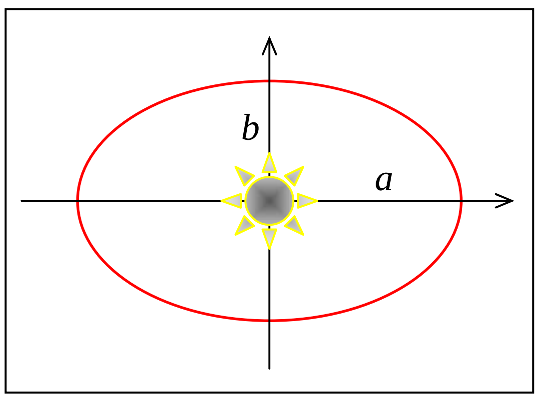

Figura 9.6

9.4.2 La segunda ley de Kepler y la conservación del momento angular.

Considere un planeta de masa M_P que se mueve en torno al Sol en una órbita elíptica, como se ilustra en la figura 9.7. La fuerza gravitacional que actúa sobre el planeta siempre es a lo largo del radio vector, dirigido hacia el Sol. El torque que actúa sobre el planeta debido a esta fuerza es cero puesto que ***F*** es paralelo a ***r***. Esto es,

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times F(r)\hat{r} = 0$$

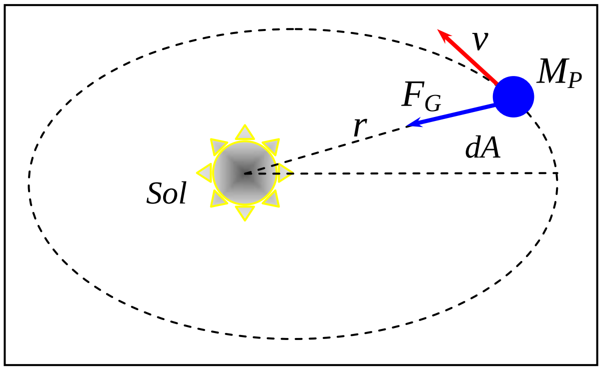

Figura 9.7

Pero recordemos que el torque es igual a la tasa de cambio en el tiempo del momento angular o $\tau = d\mathbf{L}/dt$. Por lo tanto, debido a que $\tau = 0$, el momento angular ***L*** del planeta es una constante del movimiento:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = M_P \vec{r} \times \vec{v} = constante$$

En virtud de que ***L*** es una constante del movimiento, vemos que el movimiento del planeta en cualquier instante está restringido al plano formado por ***r*** y ***v***. Este importante resultado significa que:

Tanto el momento angular total como la energía total del sistema Sol - planeta son constantes del movimiento.

Podemos relacionar este resultado con la siguiente consideración geométrica. El radio vector ***r*** en la figura 9.7 barre un área *dA* en un tiempo *dt*. Esta área es igual a la mitad del área $|\vec{r} \times d\vec{r}|$ del paralelogramo formado por los vectores ***r*** y *d**r***. Puesto que el desplazamiento del planeta en un tiempo *dt* es $dr = \mathbf{v}dt$, obtenemos

$$dA = \frac{1}{2}|\vec{r} \times d\vec{r}| = \frac{1}{2}|\vec{r} \times \vec{v}dt| = \frac{L}{2M_P}dt$$

$$\boxed{\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2M_p} = constante} \qquad (9.4)$$

donde $\boldsymbol{L}$ y M_P son constantes del movimiento. Así pues, concluimos que el radio vector desde el Sol hasta un planeta barre área iguales en tiempos iguales. Este resultado es la segunda ley de Kepler.

La segunda ley de Kepler no revela la naturaleza inversa al cuadrado de la fuerza de gravedad. Aunque no lo demostramos aquí, la primera ley de Kepler es una consecuencia directa del hecho de que la fuerza gravitacional varía como $1/r^2$. Esto es, bajo una ley de fuerza del inverso al cuadrado, es posible demostrar que las órbitas de los planetas son elipses con el Sol en un foco.

Ejemplo 9.5*. Un satélite de masa M_S se mueve en una órbita elíptica alrededor de la Tierra. Las distancias mínima y máxima al satélite desde la Tierra reciben el nombre de perihelio (r_p en la figura 9.8) y afelio (indicado por r_a). Si la velocidad del satélite en r_p es v_p, ¿cuál es su velocidad en r_a.*

Solución. El momento angular del satélite en relación con la Tierra es $M_S\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}$. En los puntos r_a y r_p, $\boldsymbol{v}$ es perpendicular a $\boldsymbol{r}$. En consecuencia la magnitud del momento angular en estos puntos es $L_a = M_S v_a r_a$ y $L_p = M_S v_p r_p$. Debido a que el momento angular es constante, vemos que:

$$M_S v_a r_a = M_S v_p r_p$$

$$v_a = \frac{r_p}{r_a} v_p$$

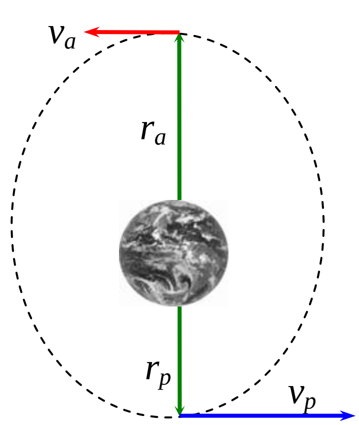

Figura 9.8 Ejemplo 9.5.

9.5 EL CAMPO GRAVITACIONAL.

Cuando Newton publicó por primera vez su teoría de la gravitación, para sus contemporáneos fue difícil aceptar la idea de un campo de fuerza que pudiera actuar a través de una distancia. Se preguntaban cómo era posible que dos masas interactuaran aun cuando no estuvieran en contacto entre sí. Aunque el propio Newton no pudo responder a esta pregunta, su teoría fue ampliamente aceptada debido a que explicó de manera satisfactoria el movimiento de los planetas.

Un planteamiento alternativo en la descripción de la interacción gravitacional, por lo tanto, es introducir el concepto de un ***campo gravitacional*** que cubre cada punto en el espacio. Cuando una partícula de masa m se sitúa en un punto donde el campo es el vector $\mathbf{g}$, la partícula experimenta una fuerza $\mathbf{F_g} = m\mathbf{g}$. En otras palabras, el campo ejerce una fuerza sobre la partícula. Por lo tanto, el campo gravitacional se define por medio de

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}_g}{m}$$

Es decir, el campo gravitacional en un punto en el espacio es igual a la fuerza gravitacional experimentada por una masa de prueba situada en el punto, dividido por la masa de prueba. Por ejemplo, considere un objeto de masa m cerca de la superficie terrestre. La fuerza gravitacional sobre el objeto está dirigida hacia el centro de la Tierra y tiene una magnitud mg. Puesto que la fuerza gravitacional sobre el objeto tiene una magnitud GM_Tm/r^2 (donde M_T es la masa de la Tierra), el campo $\mathbf{g}$ a una distancia r del centro de la Tierra es

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}_g}{m} = -\frac{GM_T}{r^2}\hat{r}$$

donde $\hat{r}$ es un vector unitario que apunta radialmente hacia fuera de la Tierra, y el signo menos indica que el campo apunta hacia el centro terrestre, como en la figura 9.9. Advierta que los vectores de campos en diferentes puntos que circundan la Tierra varían tanto en dirección como en magnitud. En una región pequeña cercana a la superficie de la Tierra, el campo hacia abajo *g* es aproximadamente constante y uniforme, como se indica en la figura 9.9. La ecuación anterior es válida en todos los puntos *fuera* de la superficie terrestre, suponiendo que la Tierra es esférica. En la superficie terrestre, donde $r = R_T$, $\boldsymbol{g}$ tiene una magnitud de *9.8 N/kg*.

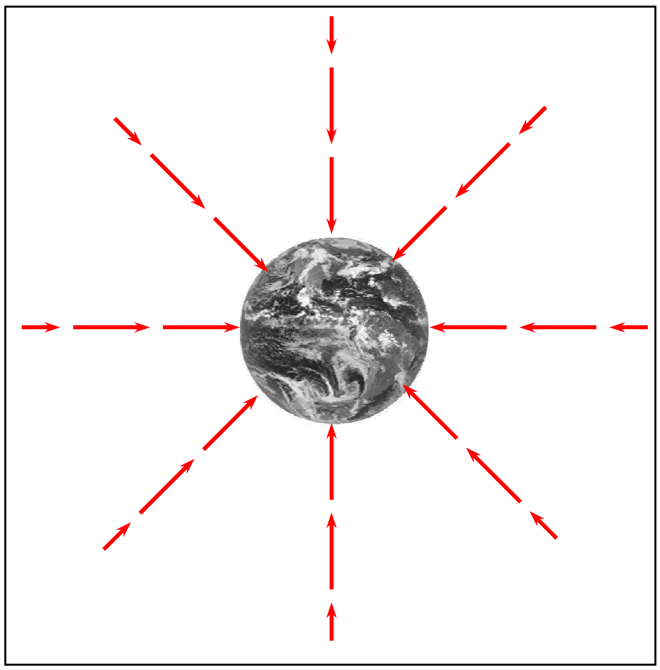

Figura 9.9 Representación del campo gravitacional terrestre.

PROBLEMAS.

9.1. Dos objetos se atraen entre sí con una fuerza gravitacional de magnitud $1x10^{-8}$ *N* cuando están separados 20 cm. Si la masa total de los dos objetos es 5 kg, ¿cuál es la masa de cada uno?

9.2. La distancia entre los centros de dos esferas es 3 m. La fuerza entre ellas es 2.75 x 10^{-12}N. ¿Cuál es la masa de cada esfera, si la masa de una de ellas es el doble de la otra?

9.3. Tomás que tiene una masa de 70 kg y Sara de 55 kg, se encuentran en una pista de bailes separados 10 m. Sara levanta la mirada y ve a Tomás, ella siente una atracción. a) Si la atracción es gravitacional, calcule su magnitud. b) Pero la Tierra ejerce una atracción gravitacional sobre Sara ¿Cuál es su magnitud?

9.4. La masa de la Luna es $7.34x10^{22}$ *kg* y se encuentra a $3.8x10^{8}$ *m* de la Tierra. a) Calcule la fuerza de atracción gravitacional entre las dos. b) Encuentre el valor del campo gravitacional terrestre en la Luna.

9.5. ¿Qué pasaría con el valor de G y de g, si la tierra tuviera el doble de su masa pero el mismo tamaño?

9.6. Comparar la masa y el peso de un astronauta de 7*5 kg* en la Tierra, con su peso cuando esta en una nave espacial en órbita circular alrededor de la Tierra, a una altura de 10^{5} *km.*

9.7. a) Un satélite está a una distancia de la Tierra igual al radio terrestre. ¿Cómo es la aceleración de la gravedad en ese punto comparada con la de la superficie de la Tierra? b) ¿A qué altura sobre la superficie de la Tierra tiene que elevarse el satélite para que su peso sea la mitad del que tiene sobre la Tierra?

9.8. La masa de Júpiter es aproximadamente 300 veces la masa de la Tierra, y su radio es aproximadamente 10 veces el terrestre. Calcule el valor de g en la superficie de Júpiter.

9.9. Urano emplea 84 años en darle la vuelta al Sol. Encuentre el radio de la órbita de Urano como múltiplo del radio de la órbita de la Tierra

9.10. Si la distancia del sol a un planeta fuera 5 veces la distancia de la Tierra al Sol, ¿En cuántos años el planeta completa una vuelta alrededor del Sol?

9.11. El 19 de Julio de 1969 la órbita de la nave espacial Apolo 11 alrededor de la Luna fue ajustada a una órbita media de *111 km*. El radio de la Luna es *1785 km*. a) ¿Cuántos minutos le tomó completar una órbita? b) ¿Qué velocidad tenía alrededor de la Luna?

9.12. Conocidas las distancias entre la Luna, la Tierra y el Sol respectivamente y sus masas, encuentre la razón de las fuerzas gravitacionales ejercidas por la Tierra y el Sol sobre la Luna.

9.13. Calcular la energía potencial de un satélite de 1000 kg que se encuentra a una altura de 2000 km sobre la Tierra.

9.14. Un satélite de 500 kg está en una órbita circular de radio $2R_T$, calcular la energía requerida para cambiar al satélite a otra órbita de radio $4R_T$.

9.15. Calcular la energía requerida para enviar una nave de 1000 kg desde la Tierra hasta una distancia donde la fuerza de gravedad sea despreciable.

9.16. Un satélite meteorológico de *100 kg* describe una órbita circular alrededor de la Tierra a una altura de *9630 km*. Calcular: a) su rapidez tangencial en la órbita, b) el trabajo necesario para ponerlo en esa órbita. R: a) 5000 m/s, b) 3.75×10^9 J.

9.17. Un satélite de *300 kg* describe una órbita circular en torno a la Tierra a una altura de 3 radios terrestres. Calcular: a) su rapidez tangencial, b) el trabajo para ponerlo en órbita, c) la aceleración de gravedad a la altura del satélite. R: a) 3963 m/s, b) 1.4×10^{10} J, c) 0.61 m/s^2.

9.18. Un satélite geoestacionario es aquel que se mueve en sincronismo con la Tierra, permaneciendo en una posición fija sobre algún punto del ecuador, completando por lo tanto una vuelta en torno a la Tierra en un día.

Calcular: a) su altura, b) su rapidez tangencial. R: a) 35930 km, b) 3075 m/s.

9.19. Los satélites de órbita polar orbitan a una altura de *850 km* de la superficie terrestre. Calcular a) la rapidez tangencial para un satélite de *300 kg*, b) el tiempo en completar una vuelta. R: a) 7450 m/s, b) 1.7 horas.

9.20. Demuestre que la energía potencial de un sistema que conste de cuatro partículas iguales de masa *M*, colocadas en las esquinas de un cuadrado de lado *D*, es $E = -(4+\sqrt{2})(GM^2/D)$.

9.21. Se dispara un cohete verticalmente desde la superficie terrestre y alcanza una altura máxima de tres veces el radio de la Tierra. ¿Cuál fue la rapidez inicial del cohete?

9.22. Buscar los datos necesarios para calcular la energía potencial total del sistema Tierra-Sol-Luna. Suponga que la Tierra y la Luna están a la misma distancia del Sol.

9.23. El sistema binario de Plaskett se compone de dos estrellas que giran en una órbita circular en torno de un centro de gravedad situado a la mitad entre ellas. Esto significa que las masas de las dos estrellas son iguales. Si la velocidad orbital de cada estrella es de v y el periodo de cada una es de T, calcule la masa M de cada estrella. R: $2v^3T/\pi G$.

9.24. Dos planetas *X* e *Y* se mueven en órbitas circulares en sentido antihorario en torno de una estrella. Los radios de sus órbitas están en la proporción 3:1. En cierto momento están alineados, formando una línea recta con la estrella. Cinco años después el planeta *X* ha girado 90° ¿Dónde está el planeta *Y* en ese momento? R: a *1.3 rev* de su posición original.

9.25. Después de que se agote su combustible nuclear, el destino final de nuestro Sol es colapsarse en una *enana blanca*, es decir, una estrella que tiene aproximadamente la masa del Sol, pero el radio de la Tierra. Calcule a) la densidad promedio de la enana blanca, b) la aceleración de caída libre en su superficie, c) la energía potencial gravitacional de un objeto de 1kg en su superficie. R: a) $1.85\text{x}10^9$ kg/m^3, b) $3.3\text{x}10^6$ m/s^2, c) $-2.1\text{x}10^{13}$ J.

9.26. El cometa Halley se acerca al Sol a una distancia aproximada de 0.57UA, y su periodo orbital es de 75.6 años. (UA es la abreviatura de unidad astronómica, donde 1UA = 1.50×10^6 km es la distancia media Tierra-Sol.) ¿Qué tan lejos del Sol viajará el cometa Halley antes de que inicie su viaje de regreso?

9.27. a) ¿Cuál es velocidad mínima necesaria para que una nave espacial escape del sistema solar, empezando en la órbita de la Tierra? b) El *Voyager I* alcanzó una velocidad máxima de 125000 km./h en su camino para fotografiar Júpiter. ¿Más allá de que distancia desde el Sol esta velocidad es suficiente para escapar del Sistema Solar? R: a) 42 m/s, b) 2.2×10^{11} m.

9.28. Para cualquier que órbita alrededor del Sol, la tercera ley de Kepler puede escribirse como $T^2 = kr^3$, donde T es el periodo orbital y r es el semieje mayor de la órbita. a) ¿Cuál es valor de la k si T se mide en años y r se mide en UA? b) Con el valor de k encuentre el periodo orbital de Júpiter si su radio medio desde el Sol es 5.2UA.

9.29. Tres masas iguales son colocadas en tres esquinas de un cuadrado de lado D. Encuentre este campo gravitacional $\boldsymbol{g}$ en la cuarta esquina debida a estas masas. R: $((2\sqrt{2}+1)/2)(GM/D^2)$.

9.30. Tres objetos puntuales que tienen masas m, $2m$ y $3m$ están fijos en las esquinas de un cuadrado de longitud de lado a de modo tal que el objeto más ligero se ubica en la esquina superior izquierda, el objeto más pesado está en la esquina inferior izquierda y el tercero, en la esquina superior derecha. Determine la magnitud y dirección del campo gravitacional $\boldsymbol{g}$ resultante en el centro del cuadrado. R: $-2\sqrt{2}\,Gm/a^2\,\hat{\imath}$.

9.31. Dos planetas hipotéticos de masa m_1 y m_2 y radios r_1 y r_2, respectivamente, están en reposo cuando están separados una distancia infinita. Debido a su atracción gravitacional, se mueven uno hacia otro en el curso de una colisión. a) Cuando la separación entre sus centro es d, calcular la rapidez de cada planeta y su rapidez relativa. b) Calcular la energía cinética de cada planeta justo antes de que choquen, si $m_1 = 2 \times 10^{24}$ *kg*, $m_2 = 8 \times 10^{24}$ *kg*, $r_1 = 3 \times 10^6$ *m* y $r_2 = 5 \times 10^6$ *m*. (Sugerencia: tanto la energía como el momento se conservan). R: $v_1 = m_2 \sqrt{\frac{2G}{d(m_1 + m_2)}}$, $v_2 = m_1 \sqrt{\frac{2G}{d(m_1 + m_2)}}$, $v_{rel} = \sqrt{\frac{2G(m_1 + m_2)}{d}}$, b) $E_1 = 1.1x10^{32}$ *J*, $E_2 = 2.7x10^{31}$ *J*.

9.32. El *Vanguard I*, lanzado el 3 de marzo de 1958, es el satélite artificial más viejo aún en órbita. Su órbita inicial tenía un apogeo de 3970 km y un perigeo de 650 km. Su velocidad máxima era de 8.23 km/s y tenía una masa de 1.60 kg. a) Determine el periodo de órbita (utilice el semi-eje mayor). b) Determine las velocidades en el apogeo y en el perigeo. c) Encuentre la energía total del satélite.

9.33. Después de una explosión supernova, una estrella puede experimentar un colapso gravitacional hasta alcanzar un estado extremadamente denso conocido como una estrella de neutrones, en el cual todos los electrones y protones se comprimen para formar neutrones. Una estrella de neutrones que tiene una masa aproximada o igual a la del Sol tendría un radio de casi *10 km*. Encuentre a) la aceleración de caída libre en su superficie, y c) la energía requerida para llevar un neutrón de 1.67×10^{-27} *kg* de masa desde su superficie hasta el infinito.