CAPITULO 7. MOMENTO LINEAL Y CHOQUES.

¿Cómo puede un karateca partir un montón de ladrillos?, ¿por qué un porrazo es mas doloroso sobre el cemento que sobre el pasto?, ¿por qué cuando se salta desde un lugar alto es conveniente flexionar las rodillas al llegar al suelo?. Para entender y responder estas preguntas hay que recordar el concepto de inercia. Todos sabemos que es más fácil detener una pelota pequeña que una grande que se mueva con la misma velocidad ¿por qué?. Estas acciones están relacionadas con la inercia (masa) de los objetos en movimiento, y esta idea de inercia en movimiento esta incluida en el concepto de ***momento***, término que se refiere a los objetos que se mueven.

7.1 MOMENTO LINEAL.

El concepto de ***momento lineal*** se usa para denotar la inercia en movimiento. El momento lineal ***p*** de una partícula de masa *m* que se mueve con velocidad ***v***, se define como el producto de la masa de un objeto por su velocidad:

$$\boxed{\vec{p} = m\vec{v}} \quad (7.1)$$

Para una partícula en movimiento en el espacio, las componentes del momento lineal en cada dirección *x, y* y *z* son:

$$p_x = mv_x,\ p_y = mv_y,\ p_z = mv_z$$

El momento lineal (muchas veces mencionado solo como *momento*) es una magnitud física vectorial porque la velocidad es un vector, su dirección es a lo largo de ***v***, su unidad de medida en el SI es *kg m/s*. De esta definición se observa que el momento lineal de un cuerpo en movimiento puede ser grande si su masa es grande, como en el caso de la pelota más grande mencionada en el primer párrafo, si su velocidad es grande, o ambas lo son. Si un cuerpo está en reposo, su momento lineal es cero. Puesto que el movimiento es producido por fuerzas, si la masa es constante, se puede relacionar el momento lineal con la fuerza ***F*** que actúa sobre la partícula usando la segunda Ley de Newton:

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} \Rightarrow$$

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Esta última ecuación dice que la fuerza neta sobre una partícula es igual a la rapidez de cambio del momento lineal de la partícula. Para el caso particular en que la fuerza neta es cero, esto es para una partícula en equilibrio de traslación, el momento lineal resultante de la partícula debe ser constante, ya que:

$$\vec{F} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{p} = cte.$$

7.2 IMPULSO.

Si cambia el momento lineal de una partícula, su velocidad varía, y si la masa es constante, como casi siempre es el caso, entonces hay aceleración, que necesariamente debe ser producida por una fuerza. Mientras mayor sea la fuerza, mayor el cambio de velocidad, y por lo tanto mayor el cambio de momento lineal. Pero hay otro factor importante a considerar: el tiempo durante el cual se ejerce la fuerza. El cambio de momento lineal es mayor si se aplica la misma fuerza durante un intervalo de tiempo largo que durante un intervalo de tiempo corto. Estas afirmaciones se pueden demostrar escribiendo la ecuación de momento lineal de la siguiente forma:

$$d\vec{p} = \vec{F}dt$$

Esta ecuación se puede integrar para obtener la variación de momento Δ***p*** de la partícula. Si el momento cambia desde un valor inicial $\boldsymbol{p_i}$ en el instante inicial t_i a un valor final $\boldsymbol{p_f}$ en el instante final t_f, integrando la ecuación anterior, se obtiene:

$$\vec{p}_f - \vec{p}_i = \Delta\vec{p} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F} dt$$

La cantidad integral de la fuerza por el intervalo de tiempo, se define como el ***impulso I*** de la fuerza ***F*** en el intervalo de tiempo *dt*, es decir el impulso ***I*** es un vector definido por la expresión:

$$\boxed{\vec{I} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F} dt = \Delta\vec{p}} \qquad (7.2)$$

Cuanto mayor sea el impulso, mayor será el cambio de momento de la partícula. Esta expresión se llama el teorema del impulso y del momento, que se expresa como: ***el impulso de la fuerza neta es igual al cambio de momento lineal de la partícula***. Este teorema es equivalente a la segunda Ley de Newton. El impulso es una magnitud vectorial cuyo valor numérico, por definición de integral, es igual al área bajo la curva *F vs t,* como se ilustra en la figura 1, tiene la misma unidad de medida que el momento lineal. En general la fuerza puede variar en forma complicada con el tiempo (figura 7.1), por lo que es conveniente definir una fuerza promedio en el tiempo, $\boldsymbol{F}_m$, que se puede considerar como una fuerza constante que dará el mismo impulso a la partícula que la fuerza ***F*** actuando durante el intervalo de tiempo Δt. De nuestros conocimientos de estadística, sabemos que el valor medio de alguna variable, se define como:

$$\vec{F}_m = \frac{1}{\Delta t}\int_{t_i}^{t_f} \vec{F} dt$$

Despejando la integral y reemplazando en la definición del impulso se puede escribir:

$$\boxed{\vec{I} = \vec{F}_m \Delta t = \Delta\vec{p}} \qquad (7.3)$$

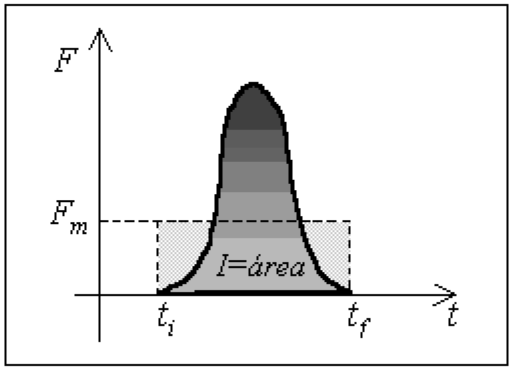

Figura 7.1

Esta expresión se llama la ***aproximación del impulso***, supone que una de las fuerzas que actúan sobre la partícula lo hace en un tiempo muy corto y es de magnitud mucho mayor que cualquier otra fuerza presente. Esta aproximación es muy útil cuando se trabaja con choques (evento en Física que luego definiremos), donde las fuerzas son muy intensas y de muy corta duración, en este caso se les da el nombre de ***fuerzas impulsivas o de impacto***.

Ahora se pueden responder las preguntas formuladas al comienzo de esta capítulo. En la del salto, al flexionar las rodillas se aumenta el tiempo durante el cual varia el momento, por lo que se reducen las fuerzas que se ejercen sobre los huesos respecto al valor que tendrían si cayeras con las piernas extendidas, lo que evita posibles lesiones. Las respuestas a las otras preguntas se deja como reflexión para el alumno.

Ejemplo 7.1. *En un saque, el Chino Ríos golpea su pelota (la de tenis) de 50 gr con la raqueta, proporcionándole una fuerza impulsiva. Suponiendo que la pelota sale de la raqueta en un ángulo de 2,5° y recorre 10 m para llegar a la misma altura en el otro sector de la cancha, calcular: a) el impulso, b) la duración del golpe si la deformación de la pelota por el golpe fue de 1 cm, c) la fuerza media sobre la pelota.*

Solución.

a) Cálculo del impulso, por su definición:

$$I = \Delta p = p_f - p_i = m\left(v_f - v_i\right)$$

donde $v_i = 0$ es la rapidez de la pelota justo antes del golpe y v_f es la rapidez con la que sale de la raqueta después del golpe, que no se conoce, pero que se puede calcular con los ecuaciones de cinemática, sabiendo que la pelota recorre $x = 10\ m$ y sale con una inclinación $\alpha = 2.5^o$. Usando la expresión de la distancia horizontal máxima para un proyectil, se tiene:

$$x = \frac{v_o^2}{g} sen2\alpha \Rightarrow v_o^2 = \frac{xg}{sen2\alpha} = \frac{10 \times 10}{sen5^\circ} \Rightarrow v_\circ = 33.9\ \text{m/s}$$
$$\Rightarrow v_f = 33.9\ \text{m/s}$$

reemplazando en el impulso, se obtiene:

$$I = mv_f - m \cdot 0 = mv_f = (0.05 gr)(33.9\ \text{m/s})$$

$$I = 1.7\ \text{kg m/s}$$

b) Si la pelota se deformó 1cm durante el golpe, considerando que cuando comienza la deformación la $v_i = 0$, suponiendo que durante la deformación la $a = cte$, la duración del golpe sería:

$$v_f^2 = v_i^2 + 2a\Delta x \Rightarrow a = \frac{v_f^2}{2\Delta x} = \frac{(33.9)^2}{2(0.01)} = 57460.5 \text{m/s}^2$$

$$v_f = v_i + a\Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{v_f}{a} = \frac{33.9 \text{m/s}}{57460.5\ \text{m/s}^2}$$

$$\Rightarrow \Delta t = 5.9 \times 10^{-4} s$$

c) El cálculo de la fuerza media se puede hacer con la ecuación:

$$I = F_m \Delta t \Rightarrow F_m = \frac{I}{\Delta t}$$

$$F_m = \frac{1.7 kgm/s}{5.9 \times 10^{-4} s} = 2881.5N$$

Ejemplo 7.2. *Una pelota de 100 g que se deja caer desde una altura h = 2m, rebota verticalmente después de golpear el suelo hasta ¾h (figura 7.2). a) Calcular el momento de la pelota antes y después de golpear el suelo, b) si la duración del golpe fue de 0.01 s, calcular la fuerza media ejercida por el piso sobre la pelota.*

Solución: a) en la figura 7.2 se muestra el esquema de la situación. El momento lineal inicial y final es:

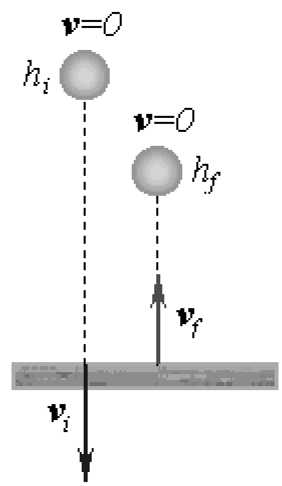

Figura 7.2 Ejemplo 7.2

momento inicial: $\vec{p}_i = -mv_i \hat{j}$

momento final: $\vec{p}_f = mv_f \hat{j}$

Los valores de las velocidades inicial y final se pueden calcular usando el principio de conservación de la energía.

Inicial: $0 + mgh_i = \frac{1}{2} mv_i^2 + 0 \Rightarrow v_i = \sqrt{2gh_i}$

Final: $\frac{1}{2} mv_f^2 + 0 = 0 + mgh_f \Rightarrow v_f = \sqrt{2gh_f} = \sqrt{2g(3/4)h_i} = \sqrt{(3/2)gh_i}$

Por lo tanto, el momento inicial y final es:

$$\vec{p}_i = -m\sqrt{2gh_i}\,\hat{j}, \quad \vec{p}_f = m\sqrt{(3/2)gh_i}\,\hat{j}$$

Reemplazando los valores numéricos, se tiene:

$$p_i = -\ 0.63\ kgm/s, \quad p_f = 0.54\ kgm/s$$

b) Usando la aproximación del impulso:

$$\vec{I} = \vec{F}_m \Delta t = \Delta \vec{p} \Rightarrow \vec{F}_m = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = \frac{\vec{p}_f - \vec{p}_i}{\Delta t}$$

$$\vec{F}_m = \frac{0.54\hat{j} - (-0.63\hat{j})}{0.01} = 118\hat{j}\ N$$

7.3 CONSERVACIÓN DEL MOMENTO LINEAL.

La segunda ley de Newton afirma que para acelerar un objeto hay que aplicarle una fuerza. Ahora vamos a decir lo mismo, pero con otro lenguaje: para cambiar el momento de un objeto hay que aplicarle un impulso, impulso que es producido por una fuerza. En ambos casos hay un agente externo que ejerce la fuerza o el impulso, las fuerzas internas no se consideran. Cuando la fuerza neta es cero, entonces el impulso neto es cero, y por lo tanto no hay cambio del momento lineal total. Entonces se puede afirmar que ***si sobre un sistema no se ejerce fuerza neta, el momento total del sistema no puede cambiar***.

Para probar tan osada afirmación, consideremos un sistema mecánico formado solo por dos partículas que interactúan entre sí, pero que están aisladas de los alrededores, y que ejercen fuerzas entre ellas (estas fuerzas pueden ser gravitacionales, elásticas, electromagnéticas, nucleares, etc.), sin consideran otras fuerzas externas al sistema. Si en un cierto instante *t* el momento de la partícula 1 es $\boldsymbol{p_1}$ y el momento de la partícula 2 es $\boldsymbol{p_2}$, y si $\boldsymbol{F_{12}}$ es la fuerza sobre la partícula 1 producida por la partícula 2 y $\boldsymbol{F_{21}}$ es la fuerza sobre la partícula 2 producida por la partícula 1, como se muestra en la figura 7.3, entonces se puede aplicar la segunda Ley de Newton a cada partícula:

$$\vec{F}_{12} = \frac{d\vec{p}_1}{dt} \quad \text{y} \qquad \vec{F}_{21} = \frac{d\vec{p}_2}{dt}$$

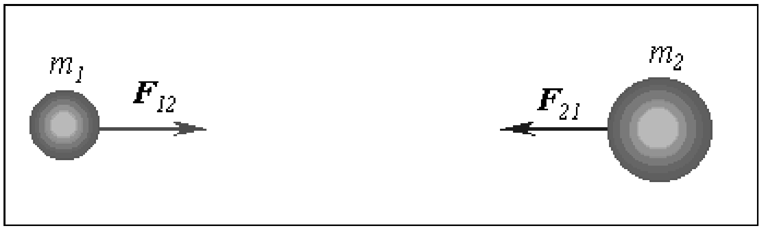

Figura 7.3

Por la tercera Ley de Newton, $\boldsymbol{F_{12}}$ y $\boldsymbol{F_{21}}$ son un par de acción y reacción, entonces:

$$\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = 0$$

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = 0$$

$$\boxed{\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = cte.} \quad (7.4)$$

Se concluye que el momento lineal total es constante. Cuando una cantidad física no cambia, decimos que se conserva, por lo tanto el momento total se conserva. No hay caso alguno en que el momento de un sistema pueda cambiar si no se aplica una fuerza externa. Esta es una de las leyes fundamentales de la mecánica, conocida como ***ley de conservación del momento lineal***. Como es una ecuación vectorial, equivale a tres ecuaciones escalares, una para cada componente *x, y* y *z:*

$$p_{1x} + p_{2x} = cte$$
$$p_{1y} + p_{2y} = cte$$
$$p_{1z} + p_{2z} = cte$$

Si $\boldsymbol{p_{i1}}$ y $\boldsymbol{p_{i2}}$ son el momento en el instante inicial de las partículas 1 y 2 y $\boldsymbol{p_{f1}}$ y $\boldsymbol{p_{f2}}$ son el momento en el instante final, entonces la conservación del momento se escribe como:

$$\vec{p}_{i1} + \vec{p}_{i2} = \vec{p}_{f1} + \vec{p}_{f2}$$

$$m_1\vec{v}_{i1} + m_2\vec{v}_{i2} = m_1\vec{v}_{f1} + m_2\vec{v}_{f2}$$

La conservación de la energía mecánica total se cumple sólo cuando las fuerzas sobre el sistema aislado son conservativas. El momento lineal para un sistema de partículas se conserva sin importar la naturaleza de las fuerzas internas que actúan sobre el sistema aislado, por lo que el principio de conservación del momento lineal es más general y completo que el de la conservación de la energía, es una de las leyes más importantes de la mecánica, deducido a partir de las Leyes de Newton.

Como el sistema está aislado, las fuerzas internas que actúan son de acción y reacción, en este caso el momento se conserva, por lo que el principio de conservación del momento lineal es un enunciado equivalente a la tercera Ley de Newton. Notar como intervienen las tres Leyes de Newton en este análisis.

Aunque la anterior deducción del principio de conservación del momento lineal fue formulada en este análisis para dos partículas que interactúan entre sí, se puede demostrar que es válida para un sistema de *n* partículas y para una distribución continua de masa, aplicada al movimiento del centro de masa del sistema de partículas o de la distribución de masa.

7.4 CHOQUES.

La ley de conservación del momento lineal se puede aplicar muy claramente en lo que en Física se conoce como choque o colisión. Se usa el término ***choque*** para representar, en escala macroscópica, un evento en el que dos partículas interactúan y permanecen juntas durante un intervalo de tiempo muy pequeño, produciendo fuerzas impulsivas entre sí. Se supone que la fuerza impulsiva es mucho más grande que cualquier otra fuerza externa. En escala atómica tiene poco sentido hablar del contacto físico; cuando las partículas se aproximan entre si, se repelen con fuerzas electrostáticas muy intensas sin que lleguen a tener contacto físico. Cuando dos o mas objetos chocan sin que actúen fuerzas externas, el momento lineal total del sistema se conserva. Pero la energía cinética en general no se conserva, ya que parte de esta se transforma en energía térmica y en energía potencial elástica interna de los cuerpos cuando se deforman durante el choque.

De acuerdo a lo expuesto, existen diferentes procesos durante los choques, por lo que estos se pueden clasificar en tres tipos:

a) Cuando dos o mas objetos chocan sin deformarse y sin producir calor, se llama ***choque elástico***. En este caso se conserva tanto el momento lineal como la energía cinética del sistema.

b) Cuando los objetos que chocan se deforman y producen calor durante el choque, se llama ***choque inelástico***. En este caso se conserva el momento lineal, pero no la energía cinética del sistema.

c) Un choque se dice ***perfectamente inelástico*** cuando los objetos se deforman, producen calor y permanecen unidos después del choque, por lo que sus velocidades finales son las mismas, y aún es válida la conservación del momento lineal.

7.4.1 Ejemplos de choque en una dimensión.

La ley de conservación del momento lineal es útil de aplicar cuando durante un choque se producen fuerzas impulsivas. Se supone que las fuerzas impulsivas son mucho mayor que cualquier otra fuerza presente y como estas son fuerzas internas, no cambian el momento lineal total del sistema. Por lo tanto, el momento lineal total del sistema justo antes del choque es igual al momento lineal total del sistema justo después del choque y el momento total se conserva. Pero en general la energía cinética no se conserva.

Ejemplo 7.3: *dos partículas de masas m_1 y m_2 que se mueven en la misma línea de acción, con velocidades $\mathbf{v}_{i1}$ y $\mathbf{v}_{i2}$, chocan en forma completamente inelástica. Después del choque ambas partículas se mueven juntas; determinar la velocidad final $\mathbf{v}_f$ del sistema.*

Solución: Supongamos que inicialmente las partículas se mueven en el mismo sentido, y si en este caso lo consideramos hacia la derecha como se muestra en la figura 7.4, la velocidad inicial de m_1 debe ser mayor que la de m_2, dando como resultado una velocidad final del conjunto hacia la derecha.

Figura 7.4 Choque completamente inelástico en una dimensión.

En este choque completamente inelástico, el momento lineal del sistema se conserva, y como el movimiento es en una dimensión (por ejemplo, la dirección del eje x), entonces de la figura 7.4, se obtiene:

$$p_{antes\ del\ choque} = p_{después\ del\ choque}$$

$$p_i = p_f \Rightarrow p_{i1} + p_{i2} = p_{f1} + p_{f2}$$

$$m_1 v_{i1} + m_2 v_{i2} = (m_1 + m_2) v_f$$

$$v_f = \frac{m_1 v_{i1} + m_2 v_{i2}}{m_1 + m_2}$$

Existen otras opciones respecto a la dirección que pueden tener las velocidades iniciales de las partículas para que se produzca el choque: que las dos se muevan en sentidos contrarios, en cuyo caso, independientemente del valor de las velocidades, se producirá el choque, ya que se mueven sobre la misma línea de acción; o que ambas partículas se muevan hacia la izquierda, en ese caso, la velocidad inicial de la partícula que 'persigue' (m_2 en la figura 7.4) a la otra, debe ser mayor para que la alcance y se produzca el choque, dando como resultado una velocidad final del conjunto hacia la izquierda. Estas situaciones las puede resolver el alumno.

Ejemplo 7.4: *dos partículas de masas m_1 y m_2 que inicialmente se mueven en línea recta, en sentidos contrarios, con velocidades* $\mathbf{v}_{i1}$ *y* $\mathbf{v}_{i2}$*, chocan frontalmente en forma elástica. Calcular la velocidad final* $\mathbf{v}_f$ *de cada una, después del choque.*

Solución: Como no se conoce ni el valor numérico de las masas ni de las velocidades iniciales, no se puede saber a priori el sentido de las velocidades finales de las partículas, así que supongamos que después del choque se mueven en sentidos opuestos. Como el choque es elástico, se conserva tanto el momento como la energía cinética, aplicando estos principios, y considerando que el choque es en una dirección, se obtiene:

Figura 7.5 *Choque elástico en una dimensión.*

Conservación del momento lineal: $p_{antes\ del\ choque} = p_{después\ del\ choque}$

$$p_{i1} + p_{i2} = p_{f1} + p_{f2}$$

$$m_1 v_{i1} - m_2 v_{i2} = -m_1 v_{f1} + m_2 v_{f2}$$

Conservación de la energía cinética: $E_{C\ antes\ del\ choque} = E_{C\ después\ del\ choque}$

$$\frac{1}{2} m_1 v_{i1}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{i2}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{f1}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{f2}^2$$

Para resolver el sistema de dos ecuaciones, para las dos incógnitas v_{f1} y v_{f2}, en la ecuación de la energía cinética, se puede dividir por ½, reagrupar los términos de m_1 y m_2 en cada miembro de la ecuación y escribirla como:

$$m_1\left(v_{i1}^2 - v_{f1}^2\right) = m_2\left(v_{f2}^2 - v_{i2}^2\right)$$

$$m_1\left(v_{i1} + v_{f1}\right)\left(v_{i1} - v_{f1}\right) = m_2\left(v_{f2} + v_{i2}\right)\left(v_{f2} - v_{i2}\right)$$

Ahora se pueden separar los términos en m_1 y m_2 de la ecuación del momento y escribirla de la siguiente forma:

$$m_1\left(v_{i1} + v_{f1}\right) = m_2\left(v_{f2} + v_{i2}\right)$$

Combinando estas dos últimas ecuaciones (desarrollos algebraicos intermedios se dejan como ejercicio para el alumno), se obtienen las expresiones para la rapidez final v_{f1} y v_{f2} de cada partícula:

$$v_{f1} = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_{i1} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_{i2}$$

$$v_{f2} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{i1} + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{i2}$$

Los resultados anteriores no deben considerarse como generales, ya que fueron deducidas para este caso particular, con los sentidos de las velocidades iniciales dados, por lo tanto no se pueden aplicar como formulas para resolver cualquier problema. Como en el ejemplo 7.3, existen otras opciones respecto a la dirección que pueden tener las velocidades iniciales de las partículas para que se produzca el choque elástico frontal, análisis que se deja de tarea para el alumno.

7.5 CHOQUES EN DOS DIMENSIONES.

Si una partícula de masa m_1 que se mueve con una determinada velocidad inicial v_{i1}, choca de costado con otra de masa m_2 inicialmente en reposo (no tiene porque estar en reposo, pero en este caso, considerémosla en ese estado), el movimiento final será bidimensional, por lo que se considera un choque en dos dimensiones. Después del choque, como se muestra en la figura 7.6, m_1 se mueve en un ángulo α sobre el eje x y m_2 en un ángulo β debajo del eje x.

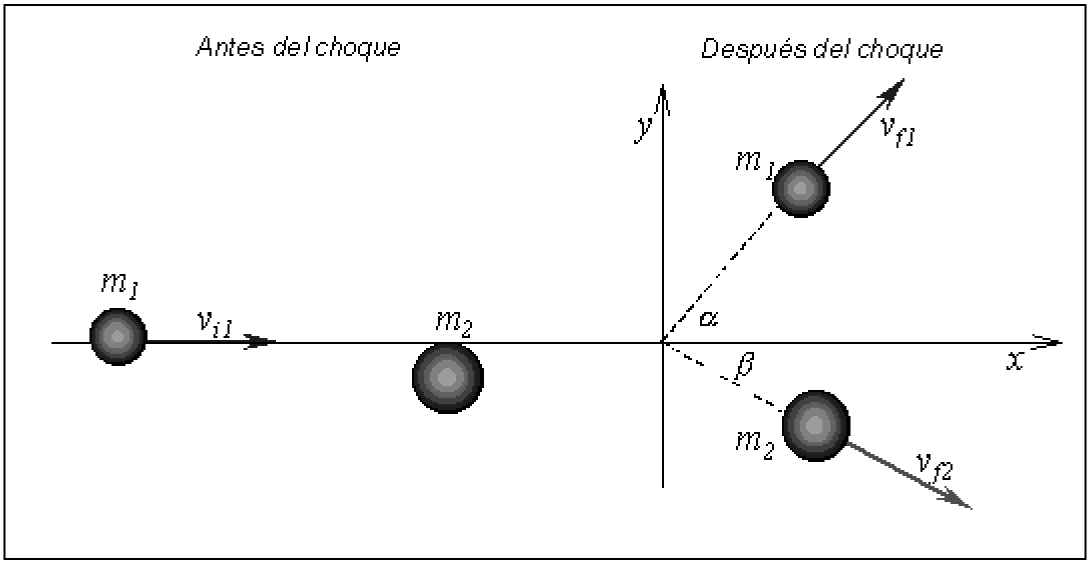

Figura 7.6 Choque en dos dimensiones.

Por la ley de conservación del momento, desarrollada en sus componentes en cada dirección x e y:

Eje x: $p_{ix} = p_{fx} \Rightarrow m_1 v_{i1} + 0 = m_1 v_{f1} \cos\alpha + m_2 v_{f2} \cos\beta$

Eje y: $p_{iy} = p_{fy} \Rightarrow 0 = m_1 v_{f1} sen\alpha - m_2 v_{f2} sen\beta$

Si además el choque es elástico, por la conservación de la energía se tiene:

$$\frac{1}{2} m_1 v_{i1}^2 + 0 = \frac{1}{2} m_1 v_{f1}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{f2}^2$$

Este es un sistema de tres ecuaciones, para resolverlo se deben dejar sólo tres incógnitas, por ejemplo v_{f1}, v_{f2}, y α. Se deja como tarea resolver el sistema, además que en los problemas de final del capítulo se proponen varios donde se debe resolver este sistema.

Ejemplo 7.5*. Una esfera de billar blanca que se mueve con cierta velocidad inicial choca de costado con otra roja, inicialmente detenida. Si después del choque la bola blanca se mueve en 40º respecto a su dirección inicial, calcular la desviación de la bola roja.*

Solución: el esquema se muestra en la figura 7.6; suponiendo que el choque es elástico, se conserva la energía cinética del sistema y como la $v_{i2} = 0$, se tiene:

$$\frac{1}{2}m_1 v_{i1}^2 + 0 = \frac{1}{2}m_1 v_{f1}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{f2}^2$$

También se conserva el momento lineal, que escrito en forma vectorial es:

$$m_1 \vec{v}_{i1} + 0 = m_1 \vec{v}_{f1} + m_2 \vec{v}_{f2}$$

Como las masas son iguales, se obtienen las siguientes dos ecuaciones:

$$v_{i1}^2 = v_{f1}^2 + v_{f2}^2$$

$$\vec{v}_{i1} = \vec{v}_{f1} + \vec{v}_{f2}$$

Para resolver este sistema se puede intentar elevar al cuadrado la última ecuación, y luego combinarla con la primera, al hacerlo se obtiene:

$$v_{i1}^2 = \left(\vec{v}_{f1} + \vec{v}_{f2}\right)\cdot\left(\vec{v}_{f1} + \vec{v}_{f2}\right) = v_{f1}^2 + 2\vec{v}_{f1}\cdot\vec{v}_{f2} + v_{f2}^2$$

$$v_{i1}^2 = v_{i1}^2 + 2\vec{v}_{f1}\cdot\vec{v}_{f2} \Rightarrow$$

$$\vec{v}_{f1}\cdot\vec{v}_{f2} = 0$$

Por la definición de producto escalar, al desarrollar la última ecuación, considerando que el ángulo que forman los vectores v_{f1} y v_{f2} es $\beta + 40^o$, se obtiene:

$$v_{f1} v_{f2} \cos(\beta + 40º) = 0$$

$$\cos(\beta + 40º) = 0º$$

Pero el coseno de un ángulo es cero, cuando ese ángulo vale 90º, entonces

$$\beta + 40º = 90º \Rightarrow \beta = 50º$$

Este resultado muestra que siempre en un choque elástico de costado, o no frontal, entre dos masas iguales, con una de ellas inicialmente en reposo, las masas finalmente se moverán en un ángulo recto una respecto a la otra.

PROBLEMAS.

7.1. ¿Se acuerdan del problema del Chino Ríos del capítulo 5? (usar esos datos) Suponga que por la fuerza elástica del raquetazo, de *5 ms* de duración, la pelota gana un 5% de la rapidez con la que golpea a la raqueta. Calcular: a) el impulso sobre la pelota, b) la fuerza media. c) Estimar el número de raquetazos que pega el Chino en un partido de tenis y calcular la fuerza media en todo un partido. R: a) 5.7 kgm/s, b) 1139 N.

7.2. Una bola de palitroque de *5 kg* se mueve en línea recta a *3 m/s.*¿Qué tan rápido debe moverse una bola de ping-pong de *2.5 gr* en una línea recta, de manera que las dos bolas tengan el mismo momento? R: 6000 m/s.

7.3. Una pelota con una masa de *60 gr* se deja caer desde una altura de *2 m.* Rebota hasta una altura de *1.8 m.* ¿Cuál es el cambio en su momento lineal durante el choque con el piso?

7.4. Una ametralladora dispara balas de *35 g* a una velocidad de *750 m/s*. Si el arma puede disparar *200 balas/min*, ¿Cuál es la fuerza promedio que el tirador debe ejercer para evitar que la ametralladora se mueva? R: 87.5 N.

7.5. En la figura 7.7 se muestra la curva fuerza-tiempo estimada para una pelota de tenis golpeada por la raqueta del Chino. A partir de esta curva, calcular, a) el impulso dado a la pelota, b) la fuerza media sobre la pelota. R: a) 10 kg m/s, b) 10 kN.

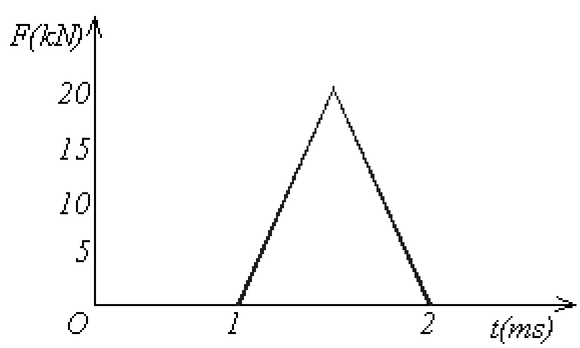

Figura 7.7 Problema 7.5.

7.6. Salas que otra vez se viene a jugar por la U, le hace un gol de tiro libre al Colo. La fuerza con la cual golpea la pelota de 400 gr, inicialmente detenida, es tal que aumenta linealmente de 0 a 1000 N durante *1 ms*, luego se mantiene constante durante otro *ms* y finalmente disminuye linealmente a 0 durante *2 ms*. Calcular: a) el impulso sobre la pelota, b) la rapidez con que sale disparada, c) la fuerza media. ¿Cuánto le ganará la U, próximo campeón, al Colo? R: a) 2.5 kgm/s, b) 6.25 m/s, c) 625 N.

7.7. Zamorano patea un balón de fútbol de *0.5 kg* con una rapidez de *15 m/s*. Chilavert, solidísimo, atrapa la pelota y la detiene en *0.02 s*. a) ¿Cuál es el impulso dado al balón? b) ¿Cuál es la fuerza promedio ejercida sobre Chilavert? R: a) 7.5 kg m/s, b) 375 N.

7.8. Un auto se detiene frente a un semáforo. Cuando la luz vuelve al verde, el auto acelera, aumentando su rapidez de cero a *5 m/s* en *1 s*. ¿Qué momento lineal y fuerza promedio experimenta un pasajero de *70 kg* en el auto?

7.9. Una bola de acero de masa M que se mueve en el plano xy, golpea una pared ubicada sobre el eje y, con una velocidad v a un ángulo α con la pared. Rebota con la misma velocidad y ángulo. Si la bola está en contacto con la pared durante un tiempo T, ¿Cuál es la fuerza promedio ejercida por la pared sobre la bola? R: $2Mv\, sen\alpha/T$.

7.10. Un meteorito de *2000 kg* tiene una velocidad de *120 m/s* justo antes de chocar de frente con la Tierra. Determine la velocidad de retroceso de la Tierra. R: $4x10^{-20}$ *m/s.*

7.11. Un chilenauta de *60 kg* camina en el espacio alejado de la nave espacial cuando la cuerda que lo mantiene unido a la nave se rompe. El puede lanzar su tanque de oxígeno de *10 kg* de manera que éste se aleje de la nave espacial con una rapidez de *12 m/s*, para impulsarse a sí mismo de regreso a la nave. Suponiendo que inicia su movimiento desde el reposo (respecto de la nave), determine la distancia máxima a la cual puede estar de la nave espacial cuando la cuerda se rompe para regresar en menos de *60 s* (es decir, el tiempo que podría estar sin respirar). R: 120 m.

7.12. Un vagón de ferrocarril de $2.5x10^4$ *kg* de masa que se mueve con una velocidad de *4 m/s* choca para conectarse con otros tres vagones de ferrocarril acoplados, cada uno de la misma masa que el primero y moviéndose en la misma dirección con una velocidad de *2 m/s*. a) ¿Cuál es la velocidad de los cuatro vagones después del choque? b) ¿Cuánta energía se pierde en el choque?

7.13. Un patinador de *80 kg* que esta parado sobre un estanque congelado cercano a un muro sostiene una bola de *0.5 kg*, que luego lanza contra el muro con una rapidez de *10 m/s* respecto al suelo y la atrapa después que golpea el muro. a) ¿Con que rapidez se mueve el patinador después de atrapar la bola?, b) ¿cuántas veces puede seguir con este proceso antes de que su rapidez llegue a *1 m/s* respecto al suelo.

7.14. Una bala de masa m_1, se dispara contra un bloque de madera de masa m_2, inicialmente en reposo sobre una superficie horizontal. Después del impacto el bloque se desliza una distancia D antes de detenerse. Si el coeficiente de roce entre el bloque y la superficie es μ. Calcular la velocidad de la bala justo antes del impacto.

7.15. Lucho de 75 kg, está parado en el extremo de un carro de 1000 kg y 10 m de largo, inicialmente detenido respecto al suelo. Lucho comienza a caminar hacia el otro extremo del carro a razón de 1 m/s relativo al suelo. Suponga que no hay roce entre el carro y el suelo. a) Analice cualitativamente el movimiento de Lucho mientras camina sobre el carro. b) Determine el tiempo que demora en llegar al otro extremo. c) ¿Qué sucede cuando se detiene en el otro extremo del carro? R: b) 9.3 s

7.16. Un cabrochico de 40 kg está parado a 3 m de un muelle, en un extremo de un bote de 70 kg, que mide 4 m de largo. El cabro observa un recurso loco sobre una roca justo en el otro extremo del bote y comienza a caminar sobre el bote para llegar donde el loco. a) Calcular la posición del cabro cuando llega al otro extremo del bote. b) Suponiendo que el cabro se puede estirar fuera del bote hasta 1 m, ¿alcanzará al loco? R: 5.5 m, b) no.

7.17. Un neutrón que se mueve con una velocidad de $3x10^6$ *m/s* choca elástica y frontalmente con un núcleo de helio en reposo. Determine: a) la velocidad final de cada partícula, b) la fracción de energía cinética transferida al núcleo de helio. R: a) $1.8x10^6$ *m/s*, $1.2x10^6$ *m/s.*

7.18. Una esfera de masa *2m* que se mueve con rapidez v_0 hacia la derecha choca de frente elásticamente con otra esfera de masa *m,* inicialmente detenida (figura 7.8). Después del choque, la esfera *2m* retrocede con $v_o/2$ y la de masa *m* se mueve hasta subir por un plano inclinado en α grados, sin roce. Calcular la distancia *D* que sube *m* por el plano. R: $4.5v_o^2/g\,sen\alpha$.

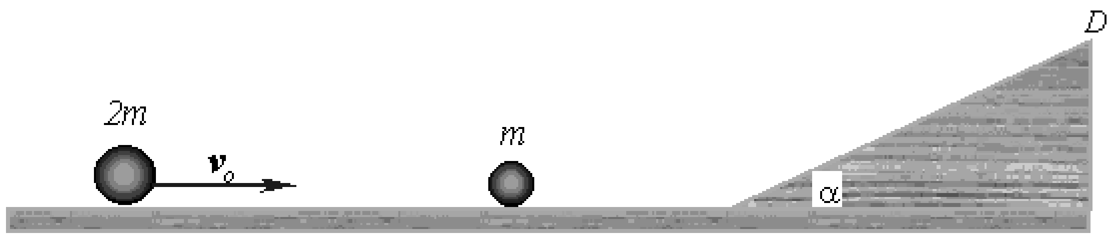

Figura 7.8. Problema 7.18.

7.19. Una explosión interna separa en dos pedazos A y B una masa de 1 kg que se movía horizontal y libremente en dirección del eje *x*, con una rapidez de 10 m/s. Después de la explosión, el trozo A de 250 gr se movía en dirección *y* a 15 m/s. a) Hacer un esquema de la situación. b) Calcular el momento antes de la explosión. c) Calcular la velocidad de B después de la explosión. R: b) $10\hat{\imath}$ *kgm/s,* c) $13.3\hat{\imath} - 5\hat{\jmath}$ *m/s.*

7.20. Cuando a Supertribi, de masa 50 kg, se le acaba el efecto de su supermaní, cae libremente llevando consigo un macetero de 5 kg. Cuando faltan 10 s para llegar al suelo, Supertribi tira horizontalmente el macetero con una rapidez de 5 m/s. Calcular donde caen Supertribi (y no le pasa nada porque es super) y el macetero. R: 5 m, 50 m.

7.21. Un núcleo inestable de $17x10^{-27}$ *kg* inicialmente en reposo, se desintegra en tres partículas. Una de ellas de $5x10^{-27}$ *kg*, se mueve a lo largo del eje y con una rapidez de $6x10^6$ *m/s*. Otra partícula, de masa $8.4x10^{-27}$ *kg* se mueve a lo largo del eje *x* con una rapidez de $4x10^6$ *m/s*. Calcular a) la velocidad de la tercera partícula, b) la energía total emitida en el proceso. R: a) $(-9.3\hat{\imath} - 8.3\hat{\jmath})x10^6$ *m/s*, b) $4.4x10^{-13}$ *J.*

7.22. Una partícula de masa *m*, que se mueve con velocidad ***v****,* choca de costado con una partícula idéntica que está en reposo. Demuestre que si el choque es elástico las dos partículas se mueven en 90° una respecto de la otra después del choque.

7.23. Considere una pista sin fricción como la mostrada en la figura 7.9. Un bloque de masa *5 kg* que se suelta desde una altura de *5 m* choca frontalmente con otro bloque de masa *10 kg* colocado en la base de la pista curva, inicialmente en reposo. Calcular la altura máxima a la cual se eleva la masa de *5 kg* después del choque. R: 0.56 m.

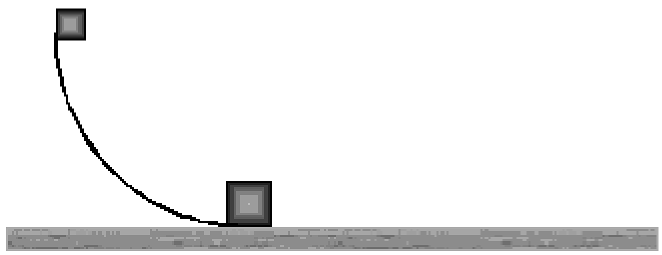

Figura 7.9 Problema 7.23.

7.24. Una partícula de masa m_1 que se mueve con velocidad inicial $\mathbf{v}_{i1}$ sobre el eje x choca de costado con otra de masa m_2 en reposo. Después del choque, m_1 y m_2 se mueven sobre el plano xy tal que la velocidad final $\mathbf{v}_{f1}$ de m_1 forma un ángulo α sobre el eje x y la velocidad final $\mathbf{v}_{f2}$ de m_2 forma un ángulo β bajo el eje x (figura 7.6). Demuestre que:

$$\tan\beta = \frac{v_{f1}\,sen\,\alpha}{v_{i1} - v_{f1}\cos\alpha}$$

7.25. Una bola de billar que se mueve a *5 m/s* golpea a otra bola estacionaria de la misma masa. Después del choque, la primera bola se mueve a *4.33 m/s* en un ángulo de 30° respecto de la línea original de movimiento. Suponiendo un choque elástico, calcular la velocidad de la bola golpeada. R: 2.5 m/s, -60º.

7.26. Una bala de masa m se dispara contra un bloque de masa M inicialmente en reposo en el borde una mesa sin fricción de altura h. La bala se incrusta en el bloque y después del impacto éste cae a una distancia horizontal D del borde de la mesa. Determine la velocidad inicial de la bala. R: $D(1+M/m)/(0.2h)^{1/2}$.

7.27. Dos carritos de igual masa, *0.25 kg*, se colocan sobre una pista sin fricción que tiene un resorte ligero de constante fuerza $k = 50\ N/m$ unido al extremo derecho de la pista. Al carrito de la izquierda se le da una velocidad inicial de *3 m/s* hacia la derecha y el otro carrito a la derecha del primero está inicialmente en reposo. Si los carros chocan elásticamente, encuentre a) la velocidad de cada uno justo después del primer choque, y b) la comprensión máxima en el resorte.

7.28. Dos partículas, de masas m y $3m$, se aproximan una a la otra a lo largo del eje $\boldsymbol{x}$ con las mismas velocidades iniciales v_o. La masa m se mueve hacia la izquierda y la masa $3m$ hacia la derecha. Chocan de frente y cada una rebota a lo largo de la misma línea en la que se aproximaban. Calcular las velocidades finales de las partículas. R: $2v_o$, *0.*

7.29. Dos partículas, de masas m y $3m$ se aproximan una a la otra a lo largo del eje $\boldsymbol{x}$ con las mismas velocidades iniciales v_o. La masa m se desplaza hacia la izquierda y la masa $3m$ hacia la derecha. Experimentan un choque no frontal de modo que m se mueve hacia abajo después del choque en un ángulo recto respecto a su dirección inicial. Calcular: a) las velocidades finales de las dos masas, b) el ángulo al cual se desvía $3m$. R: a)$2v_o/3\cos\alpha$, $2v_o\tan\alpha$, b) 35º.

7.30. Un cohete con masa inicial M_i despega desde la Tierra. Cuando su combustible se ha consumido completamente, el cohete se encuentra a una altura pequeña comparada con el radio terrestre. Demostrar que su rapidez final es $v = -v_e \ln(M_i/ M_f)-gt$, con $t = (M_i- M_f)(dm/dt)^{-1}$, donde v_e es la rapidez de escape de los gases, M_f la masa final del cohete y dm/dt el consumo constante de combustible.