

CAPITULO 5. TRABAJO Y ENERGIA.

El problema fundamental de la Mecánica es describir como se moverán los cuerpos si se conocen las fuerzas aplicadas sobre él. La forma de hacerlo es aplicando la segunda Ley de Newton, pero si la fuerza no es constante, es decir la aceleración no es constante, no es fácil determinar la velocidad del cuerpo ni tampoco su posición, por lo que no se estaría resolviendo el problema.

Los conceptos de trabajo y energía se fundamentan en las Leyes de Newton, por lo que no se requiere ningún principio físico nuevo. Con el uso de estas dos magnitudes físicas, se tiene un método alternativo para describir el movimiento, espacialmente útil cuando la fuerza no es constante, ya que en estas condiciones la aceleración no es constante y no se pueden usar las ecuaciones de la cinemática anteriormente estudiadas. En este caso se debe usar el proceso matemático de integración para resolver la segunda Ley de Newton. Ejemplos de fuerzas variables son aquellas que varían con la posición, comunes en la naturaleza, como la fuerza gravitacional o las fuerzas elásticas.

5.1 TRABAJO REALIZADO POR UNA FUERZA CONSTANTE.

Si la fuerza $\mathbf{F}$ que actúa sobre una partícula es constante (en magnitud y dirección) el movimiento se realiza en línea recta en la dirección de la fuerza. Si la partícula se desplaza una distancia x por efecto de la fuerza $\mathbf{F}$ (figura 5.1), entonces se dice que la fuerza ha realizado trabajo W sobre la partícula de masa m , que en este caso particular se define como:

$$W = F x$$

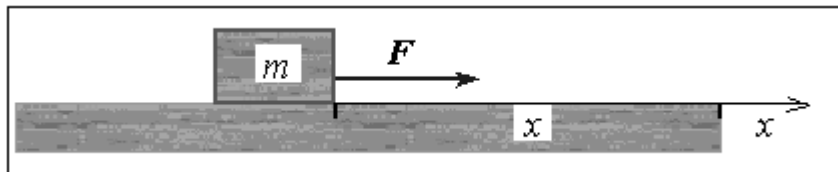


Figura 5.1 Fuerza horizontal constante que realiza un desplazamiento x .

Si la fuerza constante no actúa en la dirección del movimiento, el trabajo que se realiza es debido a la componente x de la fuerza en la dirección paralela al movimiento, como se ve en la figura 5.2a. La componente y de la fuerza, perpendicular al desplazamiento, no realiza trabajo sobre el cuerpo.

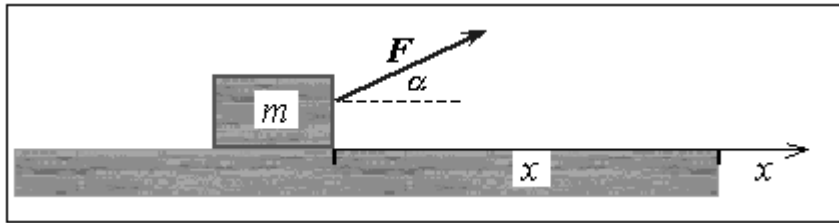


Figura 5.2a Fuerza constante que forma un ángulo α con el desplazamiento x .

Si α es el ángulo medido desde el desplazamiento x hacia la fuerza F , el valor del trabajo W es ahora:

$$W = (F \cos \alpha)x$$

De acuerdo a la ecuación anterior, se pueden obtener las siguientes conclusiones:

- a) si $\alpha = 0^\circ$, es decir, si la fuerza, como en la figura 5.1, o una componente de la fuerza, es paralela al movimiento, $W = (F \cos 0) x = F x$;
- b) si $\alpha = 90^\circ$, es decir, si la fuerza o una componente de la fuerza es perpendicular al movimiento, $W = (F \cos 90) x = 0$, no se realiza trabajo;
- c) si la fuerza aplicada sobre el cuerpo no lo mueve, no realiza trabajo ya que el desplazamiento es cero;
- d) si $0 < \alpha < 90^\circ$, es decir, si la fuerza tiene una componente en la misma dirección del desplazamiento, el trabajo es positivo;
- e) si $90^\circ < \alpha < 180^\circ$, es decir, si la fuerza tiene una componente opuesta a la dirección del desplazamiento, el trabajo es negativo.

De estas conclusiones se deduce que el trabajo, para una fuerza constante, se puede expresar de la siguiente forma:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{r}$$

El trabajo es una magnitud física escalar, obtenido del producto escalar de los vectores fuerza y posición. De la expresión anterior, por la definición de producto escalar, queda claro que el trabajo puede ser positivo, negativo o cero. Su unidad de medida en el SI es $N\,m$ que se llama *Joule*, símbolo J .

Otras fuerzas actúan sobre el cuerpo de masa m (peso, roce, normal, etc.), por lo que la ecuación anterior se refiere sólo al trabajo de la fuerza $\mathbf{F}$ en particular; las otras fuerzas también pueden realizar trabajo. En la figura 5.2 las fuerzas peso y normal no realizan trabajo ya que son perpendiculares al desplazamiento y la fuerza de roce realiza trabajo negativo, ya que siempre se opone al desplazamiento. El trabajo total sobre la partícula es la suma escalar de los trabajos realizados por cada una de las fuerzas.

Ejemplo 5.1: Con una fuerza de $250\,N$ que forma un ángulo de 60° con la horizontal se empuja una caja de $50\,kg$, en una superficie áspera horizontal (figura 5.2a). La caja se mueve una distancia de $5m$ con rapidez constante. Calcular: a) el trabajo realizado por cada fuerza, b) el coeficiente de roce.

Solución: Las fuerzas que actúan sobre la caja son $\mathbf{F}$, normal, roce y peso, el diagrama de cuerpo libre se muestra en la figura 5.2b.

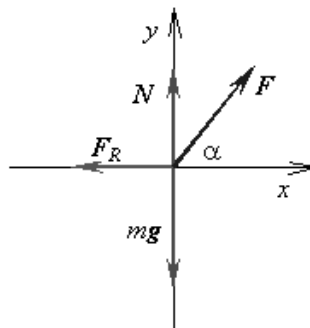


Figura 5.2b. Ejemplo 5.1

a) La definición de trabajo es $W = \vec{F} \cdot \vec{r}$, que se aplica a cada fuerza

Para F : $W_F = (F \cos \alpha) x = 250 \times (\cos 60) \times 5 = 625 \text{ J}$

Para N : $W_N = (N \cos 90) x = 0$

Para mg : $W_P = (mg \cos 270) x = 0$

Para F_R : $W_R = (F_R \cos 180) x$,

Como no se conoce el valor de la fuerza de roce, se debe calcular, del DCL y aplicando la primera ley de Newton, ya que la caja se mueve con rapidez constante, se obtiene:

Eje x : $F \cos \alpha - F_R = 0$ (1)

Eje y : $F \sin \alpha + N - mg = 0$ (2)

De (1) $F_R = F \cos \alpha = 250 \times \cos 60 = 125 \text{ N}$, reemplazando en el trabajo,

$$W_R = 125 \times \cos 180 \times 5 = -625 \text{ J}$$

b) Por definición, $F_R = \mu N$, despejando N de (2) se tiene $N = mg - F \sin \alpha$, entonces:

$$F_R = \mu(mg - F \sin \alpha) \Rightarrow \mu = \frac{F_R}{mg - F \sin \alpha}$$

$$\mu = \frac{125}{50 \times 10 - 250 \sin 60} = 0.44$$

5.2 TRABAJO REALIZADO POR UNA FUERZA VARIABLE.

Si una fuerza variable F está moviendo a un objeto a lo largo del eje x desde una posición inicial a otra final, ya no se puede usar la expresión anterior para calcular el trabajo realizado por la fuerza. En este caso se puede hacer que el

cuerpo experimente pequeños desplazamientos dx , entonces la componente F_x de la fuerza en la dirección del desplazamiento se puede considerar aproximadamente constante en ese intervalo dx y se puede calcular un trabajo dW en ese pequeño desplazamiento como:

$$dW = F_x dx$$

Si se calcula el trabajo total en el desplazamiento desde la posición inicial a la final, este es igual a la suma de todos los pequeños trabajos dW , esto es:

$$W = \int dW \Rightarrow W = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx$$

Matemáticamente, el valor de la integral es numéricamente igual al área bajo la curva de F_x versus x (figura 5.3). Si actúan más de una fuerza sobre el cuerpo, el trabajo resultante es el realizado por la componente de la fuerza resultante en dirección del desplazamiento, entonces en términos del producto escalar en tres dimensiones, el trabajo total es:

$$W_{TOTAL} = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \sum \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (5.1)$$

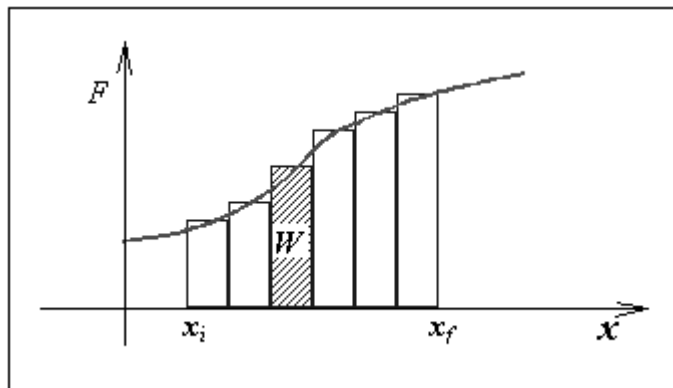


Figura 5.3

Ejemplo 5.2: Calcular trabajo realizado por un resorte.

Un sistema físico común en el que la fuerza varía con la posición, es el de un cuerpo conectado a un resorte. Si el resorte, orientado en dirección del eje x , se deforma desde su configuración inicial, es decir se estira o se comprime, por efecto de alguna fuerza externa sobre el resorte, instantáneamente actúa una fuerza F producida por el resorte contra el objeto que ejerce la fuerza externa, cuya magnitud es:

$$F = - k x$$

donde x es la magnitud del desplazamiento del resorte desde su posición no deformada en $x = 0$ y k una constante positiva, llamada *constante de fuerza del resorte*, que es una medida de la rigidez (dureza) del resorte. Esta ecuación se llama **Ley de Hooke**, y es válida para pequeños desplazamientos, ya que si el resorte se estira demasiado, puede deformarse y no recuperar su forma original. El signo negativo indica que la dirección de esta fuerza es siempre opuesta al desplazamiento, como se ilustra en la figura 5.4, donde F representa la fuerza producida por el resorte.

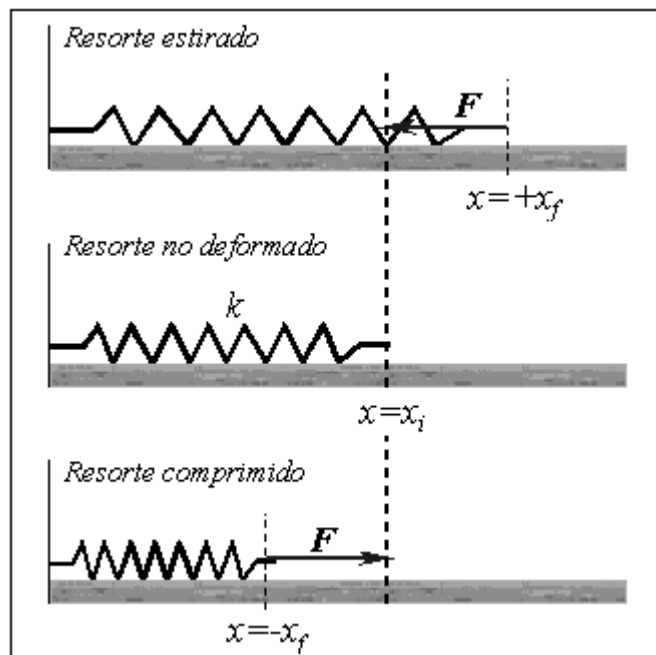


Figura 5.4

Si el cuerpo se desplaza desde una posición inicial a la final, el trabajo realizado por el resorte es:

$$W = \int_{x_i}^{x_f} (-kx)dx = \frac{1}{2}kx_i^2 - \frac{1}{2}kx_f^2$$

Por ejemplo, para un resorte de $k = 100 \text{ N/m}$, que se estira 10 cm ($= x_f$), el trabajo que realiza la fuerza del resorte para recuperar su posición inicial no deformada ($x_i = 0$) es 0.5 J .

5.3 ENERGÍA CINÉTICA.

Cuando se hace trabajo contra el roce, se observa que en la superficie de los cuerpos en contacto se produce un aumento de temperatura. Es porque se ha producido una transformación desde movimiento a calor, es decir que se ha producido una transferencia de energía de movimiento a energía calórica. En otras transformaciones se produce energía en forma de luz, sonido, eléctrica, nuclear, etc. En las transformaciones se miden cambios de energía cuando se realiza trabajo, aparecen las fuerzas que realizan trabajo, por lo tanto el trabajo es una medida de las transferencias de energía. El concepto de energía se puede generalizar para incluir distintas formas de energía conocidas como cinética, potencial, calórica, electromagnética, etc. De esta forma, la mecánica de los cuerpos en movimiento se relaciona con otros fenómenos naturales que no son mecánicos por intermedio del concepto de energía. El concepto de **energía** invade toda la ciencia y es una de las ideas unificadoras de la Física.

Cuando una fuerza actúa sobre un cuerpo, le produce una aceleración durante su desplazamiento. El trabajo realizado por la fuerza para mover al cuerpo es:

$$W_{TOTAL} = \int_{r_i}^{r_f} \sum \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Por la segunda Ley de Newton se tiene:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{d\vec{r}} \frac{d\vec{r}}{dt} = m\vec{v} \frac{d\vec{v}}{d\vec{r}},$$

reemplazando en el trabajo total, se obtiene:

$$W_{TOTAL} = \int_{r_i}^{r_f} m\vec{v} \frac{d\vec{v}}{d\vec{r}} \cdot d\vec{r} = m \int_{v_0}^v \vec{v} d\vec{v} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

La cantidad $\frac{1}{2}mv^2$, se llama **energía cinética**, E_c , es energía que se obtiene por el movimiento, es siempre positiva porque la rapidez está al cuadrado.

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 \quad (5.2)$$

Por lo tanto, el trabajo realizado por la fuerza resultante sobre una partícula es igual al cambio de energía cinética, enunciado que se conoce como el **Teorema del Trabajo y la Energía**. Cuando la rapidez es constante, no hay variación de energía cinética y el trabajo de la fuerza neta es cero. La unidad de medida de la energía cinética es el Joule, J .

5.4 POTENCIA.

Para fines prácticos interesa también conocer la rapidez con la cual se realiza trabajo. Esta información la entrega la **potencia**, que se define como la rapidez de transferencia de energía. Si se aplica una fuerza externa a un cuerpo y se realiza trabajo dW en un intervalo de tiempo dt , la potencia instantánea P (cuidado de no confundir con el peso de un cuerpo) se define como:

$$P = \frac{dW}{dt}$$

La unidad de medida de la potencia en el SI es J/s , que se llama *Watt*, símbolo W (cuidado de no confundir con el trabajo).

Como $dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, se puede escribir la potencia como:

$$P = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} \quad (5.3)$$

Se puede definir una nueva unidad de energía en términos de la unidad de potencia, llamada kilowatt-hora. Un *kilowatt-hora* (kWh) es la energía utilizada durante una hora con una potencia constante de $1 kW$. El valor de un kWh es:

$$1 kWh = 1000 W \cdot 3600 s = 3.6 \times 10^6 J.$$

El kWh es unidad de energía, no de potencia. Por ejemplo, para encender una ampolla de $100 W$ de potencia se requieren entregarle $3.6 \times 10^5 J$ de energía durante una hora, equivalente a $0.1 kWh$. Notemos que esta es una unidad de medida que nos indica que la energía es una magnitud física que, aunque abstracta, tiene valor comercial, se puede vender y comprar, ya que por ejemplo, todos los meses pagamos por una determinada cantidad de kilowatt-hora o energía eléctrica para nuestros hogares, en cambio no se pueden comprar $50 km/h$ de rapidez, pero si compramos energía en forma de gasolina para hacer que un vehículo pueda moverse.

Ejemplo 5.3: Un mueble de $40 kg$ que se encuentra inicialmente en reposo, se empuja con una fuerza de $130 N$, desplazándolo en línea recta una distancia de $5 m$ a lo largo de un piso horizontal de coeficiente de roce 0.3 (figura 5.1). Calcular: a) el trabajo de la fuerza aplicada, b) el trabajo del roce, c) la variación de energía cinética, d) la rapidez final del mueble, e) la potencia final de la fuerza aplicada.

Solución: El diagrama de cuerpo libre para el mueble de masa m de la figura 5.1 se muestra en la figura 5.5.

a) $W = \vec{F} \cdot \vec{r} = F \cos 0^\circ x = Fx$

$$W_F = (130\text{N})(5\text{m}) = 650\text{J}$$

b) $F_R = \mu N = \mu mg$

$$W_R = \vec{F}_R \cdot \vec{r} = F_R (\cos 180^\circ) x = -\mu mg x$$

$$W_R = -0.3 \cdot 40 \cdot 10 \cdot 5 = -600\text{ J}$$

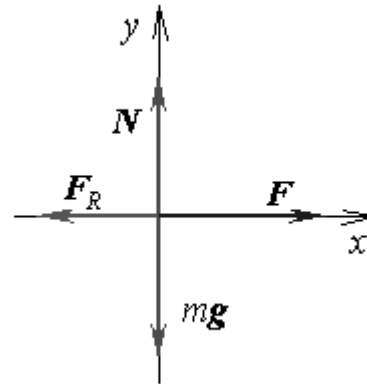


Figura 5.5 Problema 5.3

c) $W_{Total} = \Delta E_c \Rightarrow W_F + W_N + W_R + W_P = \Delta E_c,$

pero $W_N = W_P = 0$, ya que las fuerzas normal y peso son perpendiculares al desplazamiento, entonces:

$$\Delta E_c = W_F + W_R = 650 - 600 = 50\text{ J}$$

d) Para calcular la rapidez final, usamos el resultado anterior

$$\Delta E_c = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v_f = \sqrt{\frac{2\Delta E_c}{m}}$$

$$v_f = \sqrt{\frac{2\Delta E_c}{m}} = \sqrt{\frac{2 \times 50}{40}} = 1.6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

e) Usando la definición de potencia:

$$P_f = \vec{F} \cdot \vec{v} = F \cos 0^\circ v_f = Fv$$

$$P_f = 130 \times 1.6 = 208(\text{watt})$$

5.5 FUERZAS CONSERVATIVAS Y NO CONSERVATIVAS.

Se llaman **fuerzas conservativas** aquellas para las cuales el trabajo realizado por las fuerzas para mover un cuerpo entre dos puntos por cualquier trayectoria arbitraria, no depende de la trayectoria que une los puntos. Las fuerzas que dependen de la posición son conservativas, por ejemplo: la gravitacional, elástica, electromagnética, etc.

Suponer que una partícula se mueve, por la acción de una fuerza, desde una posición inicial P hasta otra posición final Q , por trayectorias arbitrarias 1 y 2, como se ve en la figura 5.6a. Si la fuerza es conservativa, entonces el trabajo para mover la partícula desde P a Q sólo depende de las coordenadas inicial y final de la partícula, esto es:

$$W_{PQ} (\text{por trayectoria 1}) = W_{PQ} (\text{por trayectoria 2})$$

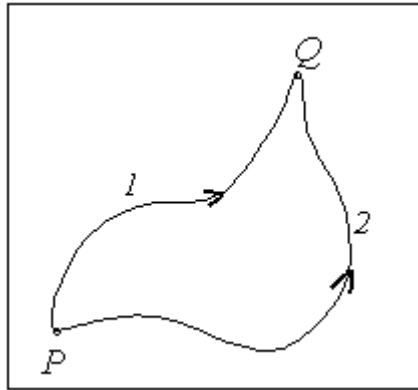


Figura 5.6a

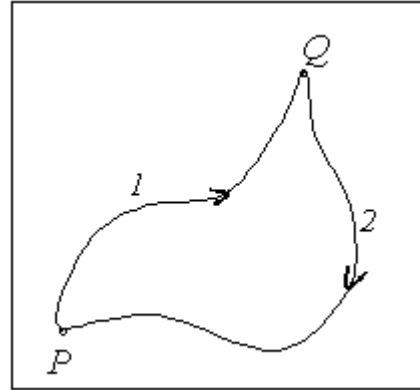


Figura 5.6b

Si ahora la partícula se mueve desde P hasta Q por la trayectoria 1 y luego regresa desde Q hasta P por la trayectoria 2 (figura 5.6b), se observa que en el regreso, $W_{QP} (\text{por trayectoria 2}) = -W_{PQ} (\text{por trayectoria 1})$, entonces:

$$W_{PQ}(\text{por trayectoria 1}) = -W_{QP}(\text{por trayectoria 2})$$

$$W_{PQ}(\text{por trayectoria 1}) + W_{QP}(\text{por trayectoria 2}) = 0$$

Entonces, si la partícula se mueve desde una posición inicial, realiza un circuito donde regresa a la misma posición inicial, el trabajo realizado por una fuerza conservativa en una trayectoria cerrada es cero.

Por el contrario, las **fuerzas no conservativas** o **fuerzas disipativas** son aquellas para las cuales el trabajo realizado por las fuerzas para mover una partícula entre dos puntos, depende de la trayectoria que se realice para unir los puntos. Para las fuerzas no conservativas se tiene que, $W_{PQ}(\text{por trayectoria 1}) \neq W_{PQ}(\text{por trayectoria 2})$. Las fuerzas de roce, que siempre se oponen al desplazamiento, son no conservativas o disipativas, el trabajo de estas fuerzas es negativo y le hacen perder energía al sistema.

5.6 ENERGÍA POTENCIAL.

El trabajo realizado por una fuerza conservativa es independiente de la trayectoria y de la rapidez con la que se mueve la partícula. En este caso el trabajo es sólo función de las coordenadas, por lo que se puede asociar con una variación de energía función de la posición, similar al caso de la energía cinética que es función de la velocidad. Las fuerzas que son función de la posición generan energía de posición, a la que se llama **energía potencial**. El trabajo realizado por la fuerza se almacena como energía potencial en el objeto en movimiento. Se define la **energía potencial** E_p , a aquella que puede obtenerse en virtud de la posición del cuerpo, tal que el trabajo realizado por la fuerza conservativa entre dos posiciones, es igual a la disminución de la **energía potencial**, esto es, el trabajo realizado por una fuerza conservativa es igual al valor negativo del cambio de energía potencial asociada con la fuerza:

$$W = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\Delta E_p = E_{pi} - E_{pf}$$

Se puede elegir una posición de referencia inicial y medir las diferencias de energía potencial respecto a ese punto y definir una función energía potencial en cualquier posición $\mathbf{r}$ como:

$$E_p(\vec{r}) = -\int_{r_i}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r} + E_{pi}$$

El valor de E_{pi} generalmente no se conoce, por lo que se elige una posición arbitraria, donde por convención se le asigna el valor cero a la energía potencial inicial, $E_{pi} = 0$, ya que por su definición, sólo tiene significado físico el cambio de energía potencial. Esta posición arbitraria se llama **nivel de referencia** y puede ser cualquiera; generalmente se toma como nivel de referencia la superficie de la Tierra o cualquier otra posición conveniente, pero una vez que se ha elegido no debe cambiarse. Con esta elección, se define la energía potencial en una posición $\vec{r}$ como:

$$E_p(\vec{r}) = -\int \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (5.4)$$

Para las fuerzas no conservativas no existe una función de energía potencial, ya que el trabajo, que depende de la trayectoria, no es función de la posición inicial y final de la partícula.

Ejemplo 5.4. Calcular la energía potencial de la fuerza peso.

Se calculará el trabajo y la energía potencial para una partícula que se deja caer libremente desde una posición inicial y_i a otra posición final y_f (figura 5.7). La fuerza que produce el movimiento de la partícula es la gravitacional, que para caída libre es el peso $P = mg$, entonces el trabajo es:

$$W = \int_{r_i}^{r_f} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{y_i}^{y_f} mg(-\hat{j}) \cdot dy(-\hat{j})$$

$$W = mgy_f - mgy_i$$

Esto demuestra que la fuerza gravitacional es conservativa, ya que el trabajo realizado por esa fuerza depende sólo de las posiciones inicial y final de la partícula.

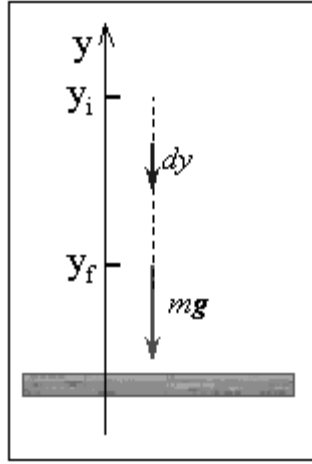


Figura 5.7. Ejemplo 5.4.

La variación de energía potencial de la partícula es:

$$\Delta E_p = -W = -(mgy_f - mgy_i) = mgy_i - mgy_f$$

Como las posiciones inicial y final son arbitrarias, se define la energía potencial de la fuerza gravitacional, o simplemente energía potencial gravitacional E_g , válida en las condiciones de caída libre, por la expresión:

$$E_g = mgy \quad (5.5)$$

Ejemplo 5.5. Calcular la energía potencial de la fuerza elástica.

Otra fuerza conservativa es la que ejerce un resorte deformado sobre un cuerpo fijo a él. El trabajo realizado por la fuerza elástica del resorte sobre el cuerpo ya se calculó, y es:

$$W = \int_{x_i}^{x_f} (-kx)dx = \frac{1}{2}kx_i^2 - \frac{1}{2}kx_f^2 = -\Delta E_p = E_{pi} - E_{pf}$$

Esto permite definir la energía potencial elástica E_E almacenada en un resorte como:

$$E_E = \frac{1}{2} kx^2 \quad (5.6)$$

La energía potencial elástica es cero cuando el resorte no está deformado, es máxima cuando alcanza su deformación máxima y es siempre positiva ya que es proporcional a x^2 .

5.7 CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA MECÁNICA.

Cuando una partícula se mueve por la acción de una fuerza conservativa, por el teorema del trabajo y la energía se tiene que el trabajo realizado por la fuerza es igual a la variación de energía cinética de la partícula:

$$W = \Delta E_c$$

Pero como la fuerza es conservativa, entonces $W = -\Delta E_p$, donde E_p puede ser la energía potencial gravitacional, elástica o cualquier otra forma de energía potencial mecánica. Igualando ambas expresiones del trabajo se obtiene:

$$\Delta E_c = -\Delta E_p \Rightarrow \Delta E_c + \Delta E_p = 0 \Rightarrow$$

$$\Delta(E_c + E_p) = 0$$

esta ecuación se puede escribir también de la siguiente forma:

$$E_{ci} + E_{pi} = E_{cf} + E_{pf}$$

Se puede definir la energía mecánica total como la suma de la energía cinética y la energía potencial:

$$E = E_c + E_p$$

entonces se obtiene la **ley de conservación de la energía mecánica**, que se escribe como:

$$E_i = E_f \Rightarrow E = cte \quad (5.7)$$

La *ley de conservación de la energía mecánica* establece que la energía mecánica total de un sistema permanece constante si las únicas fuerzas que realizan trabajo sobre el sistema son conservativas. Cuando una cantidad física no cambia, decimos que se conserva. Decir que la energía se conserva significa que la cantidad total de energía de un sistema natural no cambia, no se puede crear ni destruir energía, sólo se puede convertir de una forma a otra. Es una de las leyes fundamentales de la Física, deducida a partir de una de las leyes fundamentales de la mecánica, la segunda ley de Newton.

Si las fuerzas presentes en un sistema mecánico no son conservativas, como ocurre en los sistemas reales, la energía aparentemente no se conserva, porque se transforma en otro tipo de energía. Por ejemplo, la fuerza de roce se dice que es disipativa porque disipa energía, que se transforma en calor en la superficie de contacto entre los cuerpos. En efecto, se puede aplicar el teorema del trabajo y la energía tomando en cuenta la existencia de las fuerzas no conservativas. Si W_{NC} es el trabajo sobre una partícula de todas las fuerzas no conservativas y W_C el trabajo de todas las fuerzas conservativas, entonces:

$$W_{NC} + W_C = \Delta E_c$$

Como $W_C = -\Delta E_p$ entonces:

$$\begin{aligned}
 W_{NC} &= \Delta E_C + \Delta E_P \\
 W_{NC} &= (E_{Cf} - E_{Ci}) + (E_{Pf} - E_{Pi}) \\
 W_{NC} &= (E_{Cf} + E_{Pf}) - (E_{Ci} + E_{Pi}) = E_f - E_i \\
 W_{NC} &= E_f - E_i
 \end{aligned}$$

Es decir, el trabajo realizado por todas las fuerzas no conservativas es igual al cambio de energía mecánica total del sistema.

Ejemplo 5.6. Conservación de la energía en el movimiento de caída libre.

Aplicando el principio de conservación de la energía para un cuerpo en caída libre, se obtiene a la siguiente expresión:

$$E = cte \Rightarrow E_{ci} + E_{gi} = E_{cf} + E_{gf}$$

$$\frac{1}{2}mv_i^2 + mgy_i = \frac{1}{2}mv_f^2 + mgy_f$$

Si se conoce la rapidez inicial y la posición inicial y final de la partícula, se puede calcular su rapidez final:

$$v_f = \sqrt{v_i^2 + 2g(y_i - y_f)}$$

expresión equivalente a la obtenida por métodos cinemáticos.

Ejemplo 5.7. Para el sistema de la figura 5.8, donde el cuerpo de masa m desliza desde una altura h por la superficie curva sin roce, calcular la compresión máxima del resorte de constante k , cuando la masa choca con él.

Solución: si no hay roce, se conserva la energía mecánica, entonces:

$$E = cte \Rightarrow E_{ci} + E_{gi} + E_{Ei} = E_{cf} + E_{gf} + E_{Ef}$$

$$\frac{1}{2}mv_i^2 + mgy_i + \frac{1}{2}kx_i^2 = \frac{1}{2}mv_f^2 + mgy_f + \frac{1}{2}kx_f^2$$

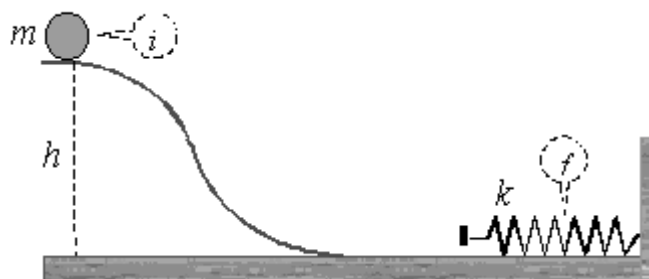


Figura 5.8 Ejemplo 5.7

Eligiendo el punto inicial i en la parte superior de la pista curva y el punto final f en la posición de la máxima compresión del resorte (figura 5.8), la energía cinética inicial y final es cero, porque m parte del reposo, $v_i = 0$, y en la compresión máxima del resorte $v_f = 0$ ya que se detiene; la energía gravitacional inicial es $mgy_i = mgh$, ya que $y_i = h$ y la final es cero en el suelo, porque se considera que la altura y_f es cero; la energía elástica inicial es cero porque en esa posición no hay resorte, entonces queda:

$$mgh = \frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{2mgh}{k}}$$

donde x es la compresión máxima del resorte.

5.8 ENERGIA Y LA MAQUINA HUMANA.

La magnitud Física tal vez más importante en la descripción de la naturaleza es la Energía. Es un concepto difícil de definir; no siempre se advierte y cambia de aspecto con facilidad asombrosa. Las formas bajo las cuales se presenta la energía, suelen ser tan diferentes que la humanidad demoró siglos en reconocerla. Su importancia principal radica en su permanencia; veremos que puede afirmarse que la energía es una magnitud increable e indestructible. Esta calidad de permanencia constituye un concepto unificador importante, porque

fenómenos tan diversos como el funcionamiento de un motor y el movimiento del cuerpo humano, puede analizarse en función del paso continuo de energía de una a otra de sus formas y su simultánea transferencia de un cuerpo a otro.

Son diversas las formas bajo las cuales puede presentarse la energía la energía: un cuerpo por el sólo hecho de estar en movimiento posee energía cinética; el mismo cuerpo u otro en virtud de su posición respecto a un cierto nivel de referencia tiene energía potencial gravitacional; un cuerpo elástico que ha sido deformado posee energía potencial elástica. La lista de formas de energía no termina aquí. Se dice que los cuerpos que rotan, poseen energía de rotación; los que vibran, energía vibracional; las ondas como las ondas marinas transportan energía ondulatoria; las ondas luminosas, energía luminosa; los cables eléctricos transportan energía eléctrica; en el interior del átomo tenemos energía atómica, energía nuclear; en las reacciones químicas estamos en presencia de energía química, etc.

Es un hecho comprobado que hay muchos casos en los que aparentemente no se mantiene constante la suma de la energía cinética y potencial de un cuerpo o cuando se aplican fuerzas externas sobre él, el trabajo realizado no se invierte en su totalidad en aumentar la energía cinética o potencial. Por ejemplo, si dejamos caer un objeto al suelo, llega con cierta velocidad (con cierta energía cinética), pero al llegar se detiene y pierde su energía cinética sin que gane energía potencial. Si arrastramos un cuerpo por el suelo, moviéndolo con velocidad aproximadamente constante, en realidad tenemos que realizar una fuerza y por tanto, al haber desplazamiento, un trabajo, pero este trabajo no se emplea en aumentar la energía potencial, porque el cuerpo se desplaza horizontalmente, ni energía cinética, porque la velocidad no aumenta. ¿Qué ha pasado con la energía cinética en el primer caso? ¿Qué ha ocurrido, en el segundo, con la energía que en forma de trabajo se le suministró al cuerpo? La respuesta es: la energía que ha desaparecido se ha transformado en “energía interna” del suelo o del cuerpo que se mueve. Nótese que no decimos que se ha transformado en “calor”, como se podría esperar, sino en “energía interna”. En otro curso de física se hablará del calor y veremos la razón de esta distinción.

En conclusión, vivimos rodeados de energía. No sólo la energía intrínseca de las moléculas, átomos y núcleos, sino también manifestaciones de la energía a escala macroscópica como resultado de la organización parcial del movimiento molecular, tal como la energía del viento en una tormenta, la energía del agua en una catarata, de un río o de las mareas, la energía del vapor producido

en un volcán o en el interior de la Tierra, etc. Uno de los grandes problemas es diseñar los medios para que esa energía pueda aprovecharse bajo control en la forma que nos interese, esto es, como energía útil. Sin embargo, sólo sabemos transformar en energía útil una pequeñísima fracción de la energía a nuestro alrededor, debido en gran parte a la falta de organización en la materia y a que, para producir cierta organización molecular, es necesario a su vez invertir cierta energía.

5.8.1 ¿Cómo camina la máquina humana?

El movimiento del cuerpo humano se explica con los mismos principios de fuerza y trabajo que describen todo movimiento. Las máquinas simples, en forma de palancas, dan la capacidad para caminar y correr. Los sistemas de palanca del cuerpo son complejos, pero en un modelo se pueden considerar cuatro partes básicas que se muestran en la figura 5.9: 1 una barra rígida (un hueso), 2 una fuente de fuerza (un músculo), 3 un punto de apoyo (articulaciones móviles entre los huesos) y 4 una resistencia (peso del cuerpo u objeto que se levanta o mueve). Los sistemas de palanca del cuerpo humano no son muy eficientes, por esto caminar y correr requiere energía (se queman calorías) y ayuda a que las personas bajen de peso.

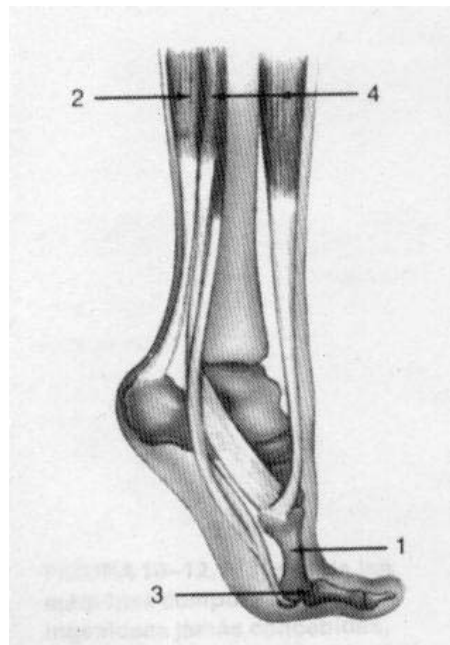


Figura 5.9. Modelo del sistema de palanca del cuerpo humano.

Cuando una persona camina, la cadera actúa como punto de apoyo y se mueve a través del arco de un círculo centrado en el pie. El centro de masa del cuerpo se mueve como una resistencia alrededor del punto de apoyo en el mismo arco. La longitud del radio del círculo es la longitud de la palanca formada por los huesos de la pierna. Los atletas de marcha incrementan su rapidez balanceando las caderas hacia arriba para aumentar este radio.

5.8.2 Articulaciones artificiales.

Se han logrado grandes avances en el diseño y sustitución de articulaciones lesionadas por articulaciones artificiales. Debido a las inmensas tensiones de las articulaciones en los brazos y las piernas, los materiales con los cuales se elaboran las partes artificiales y las uniones deben ser extremadamente fuertes. El titanio es un material común usado para elaborar articulaciones artificiales. Pero ahora se está desarrollando y probando la resistencia de plásticos ligeros y materiales similares a los huesos. Las uniones permanentes en las articulaciones artificiales generalmente se hacen por medio de cementos especiales, por fijación biológica con un sistema de ‘ajuste preciso’. En la fijación biológica se usa un material poroso que permite al hueso crecer dentro de la pared artificial. Huesos de ‘ajuste preciso’ son hechos de manera tan exacta que encajan en su sitio alrededor de los huesos naturales. Sin importar el método usado, las articulaciones artificiales deben ser capaces de soportar las cargas normales. Las articulaciones de la cadera y el codo son las áreas que soportan el mayor esfuerzo. La articulación redondeada de la cadera soporta la mayor parte del peso del cuerpo y es esencial para caminar. Aunque el codo no es una articulación que soporte mucho peso, es el punto de apoyo de la palanca del antebrazo y debe soportar esfuerzos significativos. Por ejemplo al sostener un peso de 10N (1kg) en la palma de la mano con el codo formando un ángulo de 90°, sobre el se ejerce una fuerza de 90N (9kg).

PROBLEMAS.

- 5.1. Una partícula de 4 kg. se mueve desde el origen hasta la posición C que tiene coordenadas $x=5m$ e $y=5m$ con la influencia de la fuerza de gravedad, la cual actúa en la dirección y negativa (figura 5.10). Calcule el trabajo realizado por la gravedad al ir de O a C a lo largo de las siguientes trayectorias: a) OAC, b) OBC, c) OC. R: -200 J.
- 5.2. Una fuerza que actúa sobre una partícula que se mueve sobre el plano horizontal xy está dada por $\vec{F} = (2y\hat{i} + x^2\hat{j})N$, en donde x e y están en m. La partícula se mueve desde el origen hasta una posición final C de coordenadas $x=5m$ e $y=5m$, como en la figura 5.10. Calcular el trabajo efectuado por la fuerza a lo largo de a) OAC, b) OBC, c) OC. d) ¿F es conservativa o no conservativa? R: a) 125 J, b) 50 J, c) 66.7 J d) No.

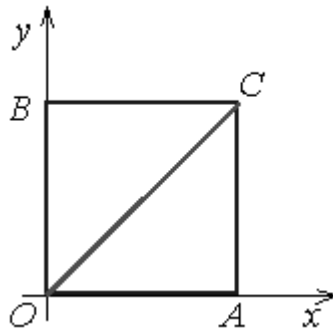


Figura 5.10 Problemas 5.1 y 5.2

- 5.3. Una sola fuerza constante $\vec{F} = (3\hat{i} + 5\hat{j}) N$ actúa sobre una partícula de 4 kg. a) Calcule el trabajo efectuado por esta fuerza si la partícula se mueve desde el origen hasta un punto cuyo vector de posición es $\vec{r} = (2\hat{i} - 3\hat{j}) m$. ¿Este resultado depende de la trayectoria? Explicar b) ¿Cuál es la rapidez de la partícula en $\vec{r}$ si su rapidez en el origen es 4 m/s. c) ¿Cuál es el cambio en la energía potencial de la partícula? R: a) -9 J, b) 3.4 m/s, c) 9 J.
- 5.4. El Nico recibe un servicio del Feña con una pelota de tenis de 50 gr, la cual al llegar a la raqueta del Nico con una rapidez de 200 km/hr, la hunde 2 cm, se detiene y sale nuevamente disparada (todo eso ocurre en

un intervalo de tiempo muy pequeño). Calcular: a) la energía cinética de la pelota antes que golpee la raqueta, b) el trabajo realizado sobre la pelota durante el golpe, c) la fuerza media sobre la pelota. R: a) 77J, c) 3850N

- 5.5. Sobre un cuerpo de 2 kg que se movía inicialmente con una rapidez de 5 m/s hacia la derecha, en una superficie horizontal, se aplica una fuerza de 10 N inclinada 30° respecto a la horizontal. El desplazamiento mientras se ejerce la fuerza fue de 5 m, y el coeficiente de roce es 0.25. Calcular a) el trabajo realizado por cada fuerza sobre el cuerpo, b) la variación de energía cinética, c) la velocidad final del cuerpo. R: b) 24.5 J, c) 7 m/s.
- 5.6. Sobre un cuerpo de masa M que se movía inicialmente con una rapidez v_0 hacia la derecha, en una superficie horizontal de coeficiente de roce μ , se aplica una fuerza de magnitud F inclinada α sobre la horizontal. El desplazamiento mientras se ejerce la fuerza fue D . Calcular: a) el trabajo realizado por F sobre el cuerpo, b) el trabajo realizado por la fuerza de roce, c) la variación de energía cinética, d) la rapidez final del cuerpo. Expresar los resultados en función de los valores conocidos M , v_0 , μ , F , α y D . R: b) $-\mu(Mg - F\sin\alpha)D$, d) $\sqrt{v_0^2 + (2D/M)[F\cos\alpha - \mu(Mg - F\sin\alpha)]}$.
- 5.7. Una fuerza F paralela a un plano inclinado en 37° , se aplica sobre un bloque de masa 50 kg. El bloque se mueve con una rapidez constante de 10 m/s hacia arriba del plano, una distancia de 20 m. El coeficiente de roce cinético entre el bloque y el plano inclinado es 0.2. Calcular el trabajo efectuado sobre el bloque por las fuerzas a) F , b) roce y c) de gravedad. R: a) 7.5 kJ, b) -1.6 kJ, c) -6 kJ.
- 5.8. Un bloque de 5 kg. se pone en movimiento subiendo por un plano inclinado en un ángulo de 30° respecto a la horizontal, con una rapidez inicial de 8 m/s. El bloque alcanza el reposo después de recorrer 3 m a lo largo del plano inclinado áspero. Determine: a) el cambio en la energía cinética. b) el cambio en la energía potencial. c) la fuerza de roce sobre el bloque. d) el coeficiente de roce cinético. R: a) -160 J, b) 73.5 J, c) 28 N, d) 0.7.

- 5.9. Algunos alumnos de Física, después de saber el resultado de su primer certamen, se premian subiendo varias veces al cerro del EULA. a) ¿Cuánto trabajo realizan en n subidas? b) Comparar la potencia cuando suben el cerro corriendo con la potencia cuando bajan lentamente. c) Un kilo de grasa entrega unos 10 kWh de energía, si se convierte grasa en energía con un rendimiento del 20%, ¿a un cerro de que altura tendrían que subir para bajar 2 kilos de ‘peso’? R: a) $n(mgh)$, c) si $m=72\text{ kg}$, 20 km.
- 5.10. Por una sección unitaria del Salto del Laja fluye agua a razón de $Q\text{ kg/s}$. Suponiendo que de la potencia generada por la caída del agua en el salto se aprovecha un 58%, ¿Cuántas ampolletas de 100 W se podrían encender con esa potencia? R: depende de valores estimados.
- 5.11. Se tiene un sistema formado por 5 esferitas de masa M unidas por cuerdas tensas de masa despreciable, separadas L entre sí, colocado inicialmente en forma horizontal. Calcular el trabajo necesario para poner una a una todas las esferitas en posición vertical. R: $10 MgL$.
- 5.12. Un bloque de masa m se suelta desde la parte superior de una pista lisa formada por un cuadrante cóncavo de circunferencia de radio R por la cual desliza. Cuando llega al extremo inferior choca con un resorte de constante k que se encuentra ubicado sobre una superficie horizontal. Calcular: a) la energía cinética del cuerpo justo antes de chocar con el resorte, b) la compresión máxima del resorte. R: a) mgR , b) $\sqrt{2mgR/k}$.
- 5.13. Una esfera de 0.5 kg desliza por un riel curvo a partir del reposo en el punto A de la figura 5.11. El tramo de A a B no tiene roce y el de B a C si tiene roce. a) Calcular la rapidez de la esfera en B. b) Si la esfera llega al reposo en C, calcular el trabajo por el roce en el tramo BC. R: a) 4.5 m/s, b) -2.5 J.
- 5.14. Un bloque de masa m comienza a moverse desde una altura H sobre un plano inclinado en 30° . Al llegar a la parte inferior del plano, el bloque se desliza por una superficie horizontal. Si el coeficiente de fricción en ambas superficies es μ , calcular la distancia horizontal que deslizará el bloque antes de llegar al reposo.

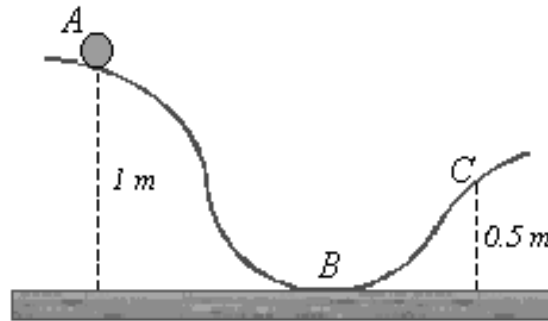


Figura 5.11 Problema 5.13.

- 5.15. Desde el extremo superior de un plano inclinado α respecto a la horizontal, de coeficiente de roce de μ , desliza desde el reposo, un bloque de masa M . El bloque se mueve una longitud L antes de comprimir a un resorte de constante K ubicado en la parte inferior del plano. a) Calcular, en función de los valores conocidos M , L , K , μ , α y g , la rapidez del bloque justo antes de tocar al resorte. b) Deducir (no resolverla) la expresión que permite calcular la máxima compresión del resorte.
- 5.16. Desde la base de un plano inclinado 30° respecto a la horizontal, se lanza en subida un cuerpo de 1 kg . El cuerpo recorre 0.5 m y después comprime 0.1 m un resorte de constante 100 N/m ubicado en la parte superior del plano antes de detenerse. a) Si el plano es liso, determine la rapidez inicial del cuerpo. b) Si la rapidez con la que el cuerpo inicia la subida del plano fuera el doble de la calculada en a) y el coeficiente de roce entre el cuerpo y el plano fuera de 0.2 , ¿cuánto se comprimirá el resorte? c) ¿y si la rapidez se reduce a la mitad? R: a) 2.64 m/s , b) 0.38 m . c) no hay compresión.
- 5.17. Un bloque de 1 kg que cuelga por el costado de una mesa se conecta por una cuerda que pasa por una polea ideal a un resorte de constante 100 N/m , ubicado horizontalmente sobre la mesa, fijo en el otro extremo. Se sostiene inicialmente al bloque en reposo manteniendo al resorte sin estirar y luego se suelta. Calcular: a) el estiramiento máximo del resorte. b) la rapidez del bloque cuando el resorte se ha estirado la mitad del alargamiento máximo. R: a) 0.2 m , b) 1 m/s .
- 5.18. Una pelota describe una circunferencia vertical en el extremo de una cuerda. Si la energía total de la pelota permanece constante, demuestre

que la tensión en la cuerda en la parte más baja es mayor que la tensión en el punto más alto en seis veces el peso de la pelota.

- 5.19. A la masa de 1 kg de un péndulo de 1 m de longitud, se la impulsa con una rapidez inicial de 2 m/s en su posición más baja. Cuando la cuerda forma un ángulo de 30° con la vertical, calcular: a) la variación de energía gravitacional de la masa, b) la rapidez de la masa, c) la altura máxima alcanzada por la masa por sobre su posición más baja. R: a) 1.3J, b) 1.2m/s, c) 0.2m.
- 5.20. Tarzán de masa M , para impresionar a Jane, se balancea de una liana de longitud L (como un péndulo) alcanzando una rapidez v_o en su posición más baja, esto es cuando la liana se encuentra vertical. Luego, cuando la liana forma un ángulo α con la vertical, calcular en función de los valores conocidos M , L , v_o , α y g : a) la rapidez de Tarzán, b) la tensión en la liana. c) altura máxima alcanzada por Tarzán desde su posición más baja.
- 5.21. La esfera de masa m de un péndulo de longitud L se mantiene inicialmente en posición vertical. Cuando sopla un viento con una fuerza constante F no conservativa, demuestre que si la esfera comienza a moverse desde el reposo, la altura máxima que alcanza es
$$H = \frac{2L}{1 + (mg/F)^2}.$$
- 5.22. Una masa de peso P se amarra a un hilo de pesca que puede soportar hasta un peso de $4P$. Si la masa se suelta desde el reposo en la posición horizontal, calcular el ángulo respecto a la vertical al cual se rompe el hilo.
- 5.23. Se lanza una pelota en un ángulo α respecto a la horizontal, desde una altura h , con una rapidez inicial v_o . Usar el método de la energía para calcular, cuando su altura es $h/2$ la velocidad de la pelota.
- 5.24. Un proyectil de 1 kg se lanza desde la superficie con una rapidez inicial de 180 km/h en un ángulo de 30° sobre el suelo. Calcular a) el trabajo para que alcance su altura máxima, b) su energía cinética cuando se encuentra en su altura máxima, c) la potencia media entre la superficie y su altura máxima.

- 5.25. Un bloque de 0.5 kg. se mueve hacia la derecha sobre una superficie horizontal áspera y choca contra un resorte horizontal, de constante 100 N/m. La rapidez del bloque justo antes del choque es 10 m/s. Después que el resorte hace rebotar al bloque hacia la izquierda, su rapidez justo cuando deja el resorte es 5 m/s. Si el coeficiente de rozamiento cinético entre el bloque y la superficie es de 0.4, determine: a) el trabajo realizado por la fricción mientras el bloque se encuentra en contacto con el resorte y b) la máxima compresión del resorte.
- 5.26. Se coloca un bloque de masa 0.25 kg sobre un resorte vertical de constante $k=5000 \text{ N/m}$ y se empuja hacia abajo, comprimiendo el resorte una distancia de 0.1 m. Cuando el bloque se suelta, deja el resorte y continúa su camino hacia arriba. ¿A qué altura máxima por encima del punto de liberación llega el bloque? R: 10 m.
- 5.27. Se conectan dos masas por una cuerda ligera que pasa por una polea de masa despreciable, sin fricción, como se muestra en la figura 5.12. Una masa de 5 kg se libera desde el reposo, de una altura de 2.5 m sobre el suelo. Utilizando la ley de la conservación de la energía determinar: a) la velocidad final de la masa de 5 kg, b) la velocidad de la masa de 3 kg justo cuando la masa de 5 kg choca con el piso, c) la altura máxima a la cual se elevará la masa de 3 kg. R: b) 4.5 m/s, c) 5 m.
- 5.28. El coeficiente de fricción entre el objeto de 3 kg y la superficie de la mesa que se ve en la figura 5.13, es 0.4. ¿cuál es la rapidez de la masa de 5 kg que cuelga, cuando ha caído una distancia vertical de 1 m? R: 3.1 m/s.
- 5.29. Un bloque de 2 kg sobre un plano áspero inclinado en 37° , se conecta a un resorte ligero de constante 100 N/m (figura 5.14). El bloque se suelta del reposo cuando el resorte no está estirado y se mueve 20 cm hacia abajo del plano antes de detenerse. Calcular el coeficiente de roce. R: 0.12.
- 5.30. Suponga que el plano inclinado del sistema descrito en el problema anterior es liso. El bloque se libera a partir del reposo con el resorte inicialmente no estirado. a) ¿Cuánto se desplaza hacia abajo del plano antes de quedar en reposo? b) ¿cuál es la aceleración del bloque al llegar a

su punto más bajo? ¿Su aceleración es constante? c) Describa las transformaciones de energía que ocurren durante el descenso del bloque.

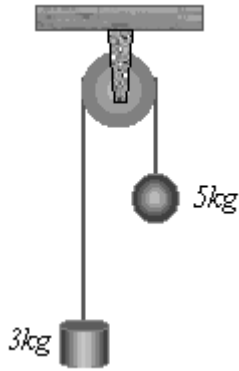


Figura 5.12.

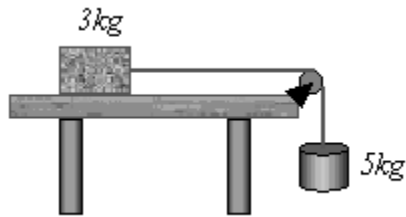


Figura 5.13. Problema 28

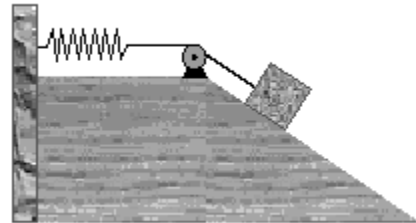


Figura 5.14. Problema 29