CAPITULO 11. MOVIMIENTO OSCILATORIO.

Los principales objetivos de los capítulos anteriores estaban orientados a describir el movimiento de un cuerpo que se puede predecir si se conocen las condiciones iniciales del movimiento y las fuerzas externas que actúan sobre el cuerpo. Si una fuerza cambia en el tiempo, la velocidad y la aceleración del cuerpo también cambiarán en el tiempo. Un tipo de movimiento particular ocurre cuando sobre el cuerpo actúa una fuerza que es directamente proporcional al desplazamiento del cuerpo desde su posición de equilibrio. Si dicha fuerza siempre actúa en la dirección de la posición de equilibrio del cuerpo, se producirá un movimiento de ida y de vuelta respecto de esa posición, por eso a estas fuerzas se les da el nombre de fuerzas de restitución, porque tratan siempre de restituir o llevar al cuerpo a su posición original de equilibrio. El movimiento que se produce es un ejemplo de lo que se llama movimiento ***periódico*** u ***oscilatorio***.

Ejemplos de movimientos periódicos son la oscilación de una masa acoplada a un resorte, el movimiento de un péndulo, las vibraciones de las cuerdas de un instrumento musical, la rotación de la Tierra, las ondas electromagnéticas tales como ondas de luz y de radio, la corriente eléctrica en los circuitos de corriente alterna y muchísimos otros más.

Un tipo particular es el ***movimiento armónico simple***. En este tipo de movimiento, un cuerpo oscila indefinidamente entre dos posiciones espaciales sin perder energía mecánica. Pero en los sistemas mecánicos reales, siempre se encuentran presente fuerzas de rozamiento, que disminuyen la energía mecánica a medida que transcurre el tiempo, en este caso las oscilaciones se llaman ***amortiguadas***. Si se agrega una fuerza externa impulsora de tal manera que la pérdida de energía se equilibre con la energía de entrada, el movimiento se llama ***oscilación forzada***.

11.1 MOVIMIENTO ARMONICO SIMPLE.

Una partícula que se mueve a lo largo del eje x, tiene un movimiento armónico simple cuando su desplazamiento x desde la posición de equilibrio, varía en el tiempo de acuerdo con la relación

$$x = A\cos(\omega t + \delta) \tag{11.1}$$

donde A, ω, y δ son constantes del movimiento. Esta es una ecuación periódica y se repite cuando ωt se incrementa en 2π radianes. Para dar un significado físico a estas constantes, es conveniente graficar x en función de t, como se muestra en la figura 11.1. La constante A se llama ***amplitud*** del movimiento, es simplemente el máximo desplazamiento de la partícula, ya sea en la dirección positiva o negativa de x. La constante ω se llama ***frecuencia angular***, el ángulo δ se llama ***ángulo*** o ***constante de fase***, y junto con la amplitud quedan determinados por el desplazamiento y velocidad inicial de la partícula. Las constantes A y δ nos dicen cual era el desplazamiento en el instante $t = 0$. La cantidad $(\omega t + \delta)$ se llama la ***fase*** del movimiento y es de utilidad en la comparación del movimiento de dos sistemas de partículas.

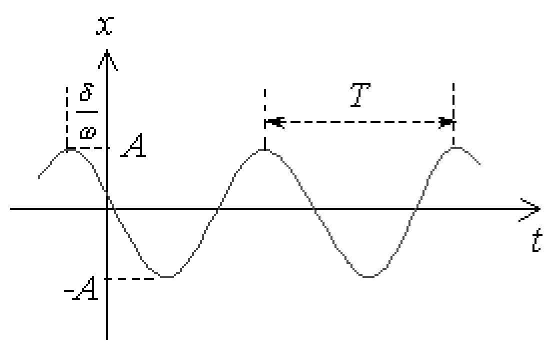

Figura 11.1 Esquema del grafico posición tiempo de la ecuación 11.1.

El periodo T es el tiempo que demora la partícula en completar un ciclo de su movimiento, esto es, es el valor de x en el instante $t + T$. Se puede demostrar que el periodo del movimiento esta dado por $T = 2\pi/\omega$, sabiendo que la fase aumenta 2π radianes en un tiempo T:

$$\omega t + \delta + 2\pi = \omega(t+T) + \delta$$

Comparando, se concluye que $\omega T = 2\pi$, o

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Al inverso del periodo se le llama ***frecuencia*** *f* del movimiento. La frecuencia representa el número de oscilaciones que hace la partícula en un periodo de tiempo, se escribe como:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

Las unidades de medida de *f* en el SI son *1/s* o *ciclos/s*, llamados Hertz, Hz. Reacomodando la ecuación de la frecuencia, se obtiene la frecuencia angular ω, que se mide en *rad/s*, de valor:

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

La velocidad de una partícula que tiene un movimiento armónico simple se obtiene derivando respecto al tiempo la ecuación 11.1:

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \delta) \tag{11.2}$$

La aceleración de la partícula está dada por *dv/dt*:

$$a = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \delta) \tag{11.3}$$

Como $x = A\cos(\omega t + \delta)$, se puede expresar la aceleración en la forma:

$$a = -\omega^2 x$$

De las ecuaciones de velocidad y de aceleración, teniendo en cuenta que los valores extremos de las funciones seno o coseno son ± 1, sus valores extremos máximos o mínimos son:

$$v = \pm\omega A$$

$$a = \pm\omega^2 A$$

Las curvas de posición, velocidad y aceleración con el tiempo se muestran en la figura 11.2. En estas curvas se ve, (figura 11.2 b), como la fase de la velocidad difiere en $\pi/2$ rad o 90º con la fase del desplazamiento. Esto es, cuando x es un máximo o un mínimo, la velocidad es cero. De igual forma, cuando x es cero, la rapidez es un máximo o un mínimo. Del mismo modo, como la fase de la aceleración difiere en π rad o 180º con la fase del desplazamiento, (figura 11.2 c), cuando x es un máximo o un mínimo, la aceleración es un mínimo o un máximo.

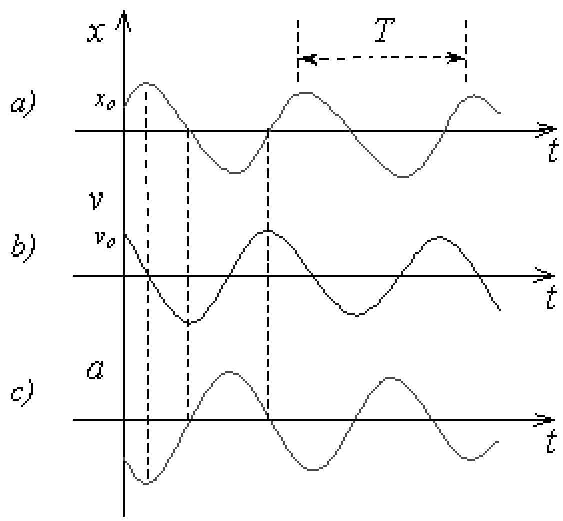

Figura 11.2. Gráficos de posición, velocidad y aceleración en función del tiempo.

La ecuación $x = A\cos(\omega t + \delta)$ es una solución general de la ecuación diferencial que describe el movimiento armónico simple, donde la constante de fase δ y la amplitud A se deben elegir para satisfacer las condiciones iniciales del movimiento. La constante de fase es importante cuando se quiere comparar el movimiento de dos o más partículas oscilantes. Suponiendo que se conocen la posición inicial y la velocidad inicial de un oscilador, esto es, en $t = 0$, $x = x_o$ y $v = v_o$. Con esas condiciones, las ecuaciones 11.1 y 11.2 se reducen a:

$$x_o = A\cos\delta \qquad \text{y} \qquad v_o = -\omega A\,\mathrm{sen}\,\delta$$

que son dos ecuaciones de donde se pueden calcular los valores de la constante de fase δ y la amplitud A. Dividiéndolas, se obtiene:

$$\frac{v_o}{x_o} = -\omega \tan\delta \Rightarrow$$

$$\tan\delta = -\frac{v_o}{\omega x_o}$$

Si ahora las ecuaciones para x_o y v_o se elevan al cuadrado y se suman, se obtiene:

$$x_o^2 + \left(\frac{v_o}{\omega}\right)^2 = A^2(\cos^2\delta + sen^2\delta) \Rightarrow$$

$$A = \sqrt{x_o^2 + \left(\frac{v_o}{\omega}\right)^2}$$

Entonces se observa que δ y A se pueden conocer si se especifican las condiciones iniciales x_o, ω y v_o.

Para concluir esta descripción, podemos resumir algunas propiedades de una partícula que se mueve con un movimiento armónico simple:

1. El desplazamiento, la velocidad y la aceleración varían senoidalmente con el tiempo, pero no se encuentran en fase.
2. La aceleración de la partícula es proporcional al desplazamiento, pero en dirección opuesta.
3. El periodo y la frecuencia son independientes de la amplitud.

Ejemplo 11.1. Una partícula oscila con un movimiento armónico simple a lo largo del eje x. Su desplazamiento varía con el tiempo de acuerdo con la ecuación:

$$x = 4\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$$

donde *x* se mide en *m*, *t* en s y los ángulos en radianes. Calcular: a) la amplitud, frecuencia y periodo del movimiento, b) la velocidad y la aceleración de la partícula en cualquier instante *t*, c) la posición, la velocidad y la aceleración en el instante $t = 1s$, d) la velocidad y la aceleración máximas de la partícula, e) el desplazamiento entre $t = 0$ y $t = 1s$, f) la fase del movimiento en $t = 2s$.

Solución:
a) comparando la ecuación dada con la ecuación general del movimiento, se encuentra que $A = 4m$, $\omega = \pi$ rad, la frecuencia y el periodo son:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\pi}{2\pi} = 0.5\,\text{Hz}, \qquad T = \frac{1}{f} = \frac{1}{0.5} = 2s$$

b)

$$v = \frac{dx}{dt} = -4\pi sen\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -4\pi^2 \cos\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$$

c) para $t = 1\ s$,

$$x = 4\cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = 4\cos\frac{5\pi}{4} = 4(-0.707) = -2.83m$$

$$v = -4\pi sen\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -4\pi(-0.707) = 8.9\ {}^{m}\!/_{s}$$

$$a = -4\pi^2\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -4\pi^2(-0.707) = 27.9\ {}^{m}\!/_{s^2}$$

d) los valores máximos se obtienen cuando seno y coseno valen uno:

$$v_{max} = 4\pi = 12.6\ m/s$$

$$a_{max} = 4\pi^2 = 39.5\ m/s^2$$

e) para $t = 0$ y $t = 1s$,

$$x_o = 4\cos\left(0+\frac{\pi}{4}\right) = 4\cos\frac{\pi}{4} = 4(0.707) = 2.83m$$

$$x_1 = -2.83\ m$$

$$\Delta x = x_1 - x_o = -2.83 - 2.83 = -5.66\ m$$

f) la fase se define como:

$$fase = \omega t + \delta, \text{ para } t = 2s \text{ y } \delta = \pi/4:$$

$$fase = 2\pi + \pi/4 = 9\pi/4\ rad.$$

11.2 MASA SUJETA A UN RESORTE.

Una masa sujeta al extremo de un resorte, con la masa moviéndose libremente sobre una superficie horizontal sin fricción o verticalmente en el aire, oscilará si se la aparta de su posición de equilibrio $x = 0$ donde el resorte se encuentra sin deformar, con un movimiento armónico simple. En la figura 11.3 se observa un esquema para una masa que oscila sobre una superficie horizontal sin fricción. Cuando la masa se desplaza una pequeña distancia x desde su posición de equilibrio, el resorte ejerce una fuerza dada por la Ley de Hooke,

$$F = -kx$$

Sabemos que esta fuerza siempre es opuesta al movimiento. Aplicando la segunda ley de Newton, suponiendo que esta es la única fuerza que actúa sobre la masa m, se obtiene:

$$F = -kx = ma \Rightarrow$$

$$a = -\frac{k}{m}x$$

esto es, la aceleración de *m* es proporcional al desplazamiento desde su posición de equilibrio y en dirección opuesta. Como la aceleración es la segunda derivada de la posición, y definiendo el cuociente $k/m = \omega^2$, se puede escribir:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \tag{11.4}$$

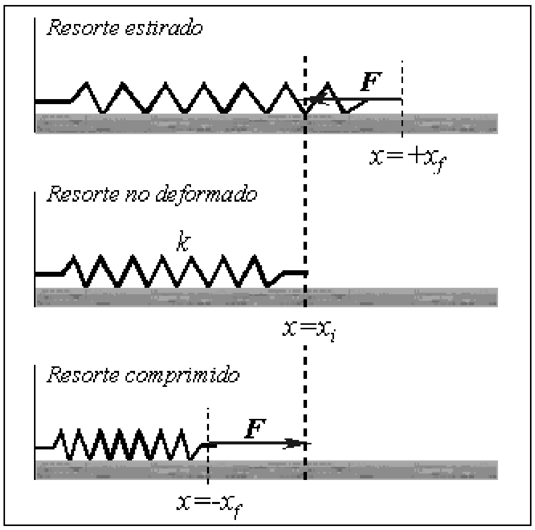

Figura 11.3 Masa unida a un resorte oscilando sobre una superficie horizontal sin roce.

La solución de la ecuación diferencial 11.4 es la que describe el movimiento armónico simple, tiene la misma forma que la ecuación 11.1:

$$x = A\cos(\omega t + \delta)$$

Esto se puede generalizar para afirmar que cualquier fuerza que actúe sobre una partícula, que sea linealmente proporcional al desplazamiento y de dirección opuesta, le producirá a la partícula un movimiento armónico simple.

Para la masa sujeta al resorte, el período y la frecuencia del sistema es:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Ejemplo 11.2. Una masa de 200 g se conecta a un resorte de constante 5 N/m, que es libre de oscilar sobre una superficie horizontal sin roce. Si la masa se desplaza 5 cm del equilibrio y se suelta desde el reposo, como en la figura 11.3, calcular: a) la frecuencia y el periodo del movimiento, b) la rapidez y la aceleración máxima de la masa, c) el desplazamiento, la rapidez y la aceleración para $t = 2\pi\, s$.

Solución: los datos son: $m = 0.2\ kg$, $k = 5\ N/m$, $A = 0.05\ m$, $v_o = 0$,

a)

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{5\ N/m}{0.2\ kg}} = 5\ {}^{rad}\!/_{s}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{5} = 1.26s$$

b)

$$v_{max} = \omega A = (5\ rad/s)(0.05\ m) = 0.25\ m/s$$

$$a_{max} = \omega^2 A = (5\ rad/s)^2\ (0.05\ m) = 1.25\ m/s^2$$

c) para $t = 2\pi\, s$:

$$x = A\cos\omega t = 0.05\cos(10\pi) = 0.05\ m$$

$$v = -\omega A\,\mathrm{sen}\,\omega t = -(5)(0.05)\,\mathrm{sen}(10\pi) = 0$$

$$a = -\omega^2 A\cos\omega t = -(5)^2\ (0.05)\cos(10\pi) = 1.25\ m/s^2$$

11.3 ENERGIA EN EL MOVIMIENTO ARMONICO SIMPLE.

De la definición de energía cinética, reemplazando la ecuación de la rapidez de una partícula con movimiento armónico simple, se obtiene:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 sen^2(\omega t + \delta) \tag{11.5}$$

La energía potencial elástica almacenada en un resorte, para cualquier deformación *x* es:

$$E_E = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \delta) \tag{11.6}$$

La energía mecánica total en el movimiento armónico simple, considerando que $\omega^2 = k/m$ o bien $m\omega^2 = k$, se puede escribir como:

$$E = E_c + E_E = \frac{1}{2}kA^2\left[sen^2(\omega t + \delta) + \cos^2(\omega t + \delta)\right]$$

$$E = \frac{1}{2}kA^2 \tag{11.7}$$

De donde se deduce que la energía mecánica total en el movimiento armónico simple es una constante del movimiento, proporcional al cuadrado de la amplitud. Este valor es igual a la máxima energía potencial elástica almacenada en un resorte cuando $x = \pm A$, ya que en esos puntos $v = 0$ y no hay energía cinética.

Por otro lado, en la posición de equilibrio, $x = 0$ y por lo tanto $E_E = 0$, además en este punto la rapidez es la máxima, de tal manera que toda la energía es energía cinética, es decir en $x = 0$:

$$E \equiv E_c = \frac{1}{2}mv_{\max}^2 = \frac{1}{2}\omega^2 A^2$$

Como la superficie sobre la cual oscila el resorte es sin fricción, la energía se conserva, usando la ecuación de conservación de la energía, se puede escribir:

$$E = E_c + E_E = cte$$

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \tag{11.8}$$

De esta expresión se puede calcular la rapidez para un desplazamiento arbitrario x:

$$v = \pm\sqrt{\frac{k}{m}\left(A^2 - x^2\right)} = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2} \tag{11.9}$$

encontrándose nuevamente que la rapidez es máxima en $x = 0$ y es cero en los puntos de regreso del oscilador $x = \pm A$.

Ejemplo 11.3. Una masa de 0.5 kg conectada a un resorte de constante 20 N/m, oscila sobre una superficie horizontal sin roce, con una amplitud de 3 cm. Calcular a) la energía total del sistema y la rapidez máxima de la masa, b) la rapidez de la masa cuando el desplazamiento es 2 cm, c) la energía cinética y potencial del sistema cuando el desplazamiento es 2 cm, d) el valor de x cuando la rapidez es 0.1 m/s.

Solución: los datos son $m = 0.5\ kg$, $k = 20\ N/m$, $A = 3\ cm = 0.03\ m$,

a) la energía total es:

$$E = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}(20)(0.03)^2 = 9\times10^{-3}\,J$$

y la rapidez máxima se puede calcular con la ecuación:

$$E = \frac{1}{2}mv_{\max}^2 = 9\times10^{-3}\,J$$

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{2\times 9\times 10^{-3}}{0.5}} = 0.19\,{}^{m}\!/_{s}$$

b) Ahora se puede usar la ecuación:

$$v = \pm\sqrt{\frac{k}{m}\left(A^2 - x^2\right)} = \pm\sqrt{\frac{20}{0.5}(0.03^2 - 0.02^2)} = \pm 0.14\,{}^{m}\!/_{s}$$

los signos positivo y negativo indican que la masa podría estarse moviendo hacia la derecha o hacia la izquierda en ese instante.

c) la energía cinética es:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(0.5)(0.14)^2 = 5\times 10^{-3}\,J$$

y la energía potencial:

$$E_E = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}(20)(0.02)^2 = 4\times 10^{-3}\,J$$

d) de la ecuación:

$$v = \pm\sqrt{\frac{k}{m}\left(A^2 - x^2\right)} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\left(A^2 - \frac{m}{k}v^2\right)}$$

$$x = \pm\sqrt{\left(0.03^2 - \frac{0.5}{20}(0.1)^2\right)} = 0.025m = 2.5cm$$

11.4 EL PENDULO.

11.4.1. Péndulo simple.

El péndulo simple es otro sistema mecánico que tiene un movimiento periódico oscilatorio, si se mueve en un medio sin fricción. Un péndulo es un sistema formado por una masa puntual *m* suspendida en el aire por una cuerda de longitud *L*, de masa muy pequeña comparada con la masa *m*, por lo que se desprecia; la parte superior de la cuerda se encuentra fija, como se muestra en la figura 11.4. El movimiento del péndulo producido por la fuerza de gravedad se realiza en un plano vertical, y es un movimiento armónico simple si el ángulo θ que forma la cuerda del péndulo con la vertical es pequeño, como se puede demostrar a continuación.

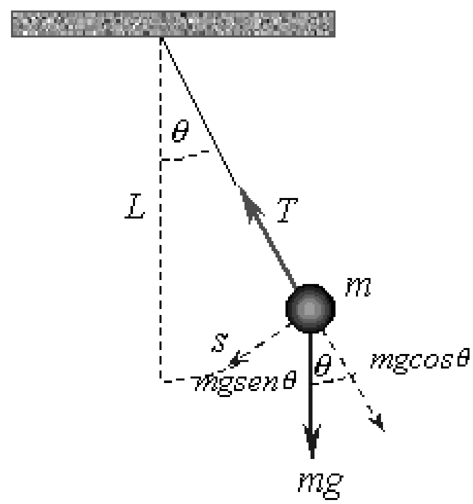

Figura 11.4 Péndulo simple.

Las fuerzas que actúan sobre la masa *m* son la tensión *T* de la cuerda y el peso *mg* de la masa, se muestran en la figura 11.4. La componente tangencial del peso, $mg\, sen\theta$, siempre apunta hacia $\theta = 0$, en dirección opuesta la desplazamiento. Esta es la fuerza de restitución, entonces puede escribirse la ecuación de movimiento en la dirección tangencial de la forma:

$$F_t = -mgsen\theta \Rightarrow m\frac{d^2s}{dt^2} = -mgsen\theta$$

donde *s* es el desplazamiento medido a lo largo del arco de trayectoria y el signo menos indica que F_t actúa opuesta al movimiento. Como $s = L\theta$ y *L* es constante, la ecuación se transforma en:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L} sen\theta$$

Como el lado derecho es proporcional a $sen\theta$, y no solo a θ, se concluye que el movimiento no es armónico simple. Esa es una ecuación diferencial difícil de resolver, por lo que se supone que el péndulo se mueve en pequeños desplazamientos, tal que θ es pequeño, en este caso se puede usar la aproximación $sen\theta \approx \theta$ y la ecuación diferencial del movimiento se reduce a:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\theta \qquad (11.10)$$

que tiene la misma forma que la ecuación que describe al movimiento armónico simple, por lo que solo en esas condiciones el movimiento del péndulo es un movimiento armónico simple. Su solución es entonces:

$$\theta = \Theta\cos(\omega t + \delta) \qquad (11.11)$$

donde Θ es la amplitud que corresponde al máximo desplazamiento angular y ω es la frecuencia angular, de valor:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

El periodo del movimiento es:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

El periodo y la frecuencia de un péndulo simple dependen solo de la longitud de la cuerda y la aceleración de gravedad, y son independiente de la masa *m* del péndulo. Esto significa que todos los péndulos simples de igual longitud en el mismo lugar, oscilarán con el mismo periodo.

Comúnmente se usa el péndulo simple como un medidor de tiempo. También es un dispositivo adecuado para hacer mediciones precisas de la aceleración de gravedad, que son importantes por ejemplo cuando las variaciones locales de g pueden dar información sobre las fuentes subterráneas de petróleo u otros recursos minerales.

Ejemplo 11.4. Una persona que anda trayendo un cronómetro, pero no una huincha para medir la altura de un edificio, quiere saber su altura. Entonces instala un péndulo que se extiende desde el techo hasta el piso y mide que tiene un periodo de 15 s. a) Calcular la altura de ese edificio. b) Si el mismo péndulo estuviera en la Luna, donde $g = 1.7\ m/s^2$, calcular el periodo.

Solución: se conoce $T = 15\ s$, entonces:
a)

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \Rightarrow L = \frac{gT^2}{4\pi^2} = \frac{(10)(15)^2}{4\pi^2} = 57m$$

b) en la Luna $g = 1.7\ m/s^2$,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{57}{1.7}} = 36.4s$$

11.4.2. Péndulo físico.

Un péndulo físico consta de cualquier cuerpo rígido suspendido de un eje fijo que no pasa por su centro de masa. El cuerpo rígido oscilará cuando se desplaza de su posición de equilibrio. Si el cuerpo rígido se sujeta en un eje que pasa por un punto O a una distancia d del centro de masa, como se muestra en la figura 11.5, la fuerza debido a la gravedad produce un torque respecto de O, de magnitud $mgd\ sen\theta$. Como el torque se escribe $\tau = I\alpha$, donde I es el momento de inercia respecto al eje que pasa por O y α es la segunda derivada de la rapidez angular, se obtiene:

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgd\ sen\theta$$

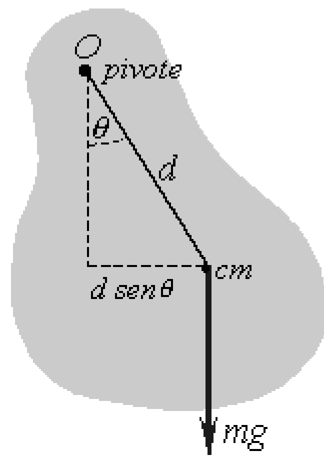

Figura 11.5 Péndulo físico.

El signo menos indica que la fuerza de gravedad es una fuerza de restitución que produce un torque que hace disminuir el ángulo θ. Para resolver esta ecuación, nuevamente se supone que el péndulo físico se mueve en pequeños desplazamientos, tal que θ es pequeño, en este caso se puede usar la aproximación $sen\theta \approx \theta$ y la ecuación diferencial del movimiento se reduce a:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{mgd}{I}\theta = -\omega^2\theta \qquad (11.12)$$

que tiene la misma forma que la ecuación que describe al movimiento armónico simple, por lo que en esas condiciones así es el movimiento del péndulo. Su solución es entonces:

$$\theta = \Theta\cos(\omega t + \delta)$$

donde Θ es la amplitud que corresponde al máximo desplazamiento angular y ω es la frecuencia angular, de valor:

$$\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I}}$$

El periodo del movimiento es:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}}$$

Se pueden usar estos resultados para medir el momento de inercia de cuerpos rígidos planos. Si se ubica el centro de masa y se mide *d*, se puede obtener el momento de inercia midiendo el periodo del péndulo físico. El periodo del péndulo físico se reduce al del péndulo simple, cuando toda la masa del cuerpo rígido se concentra en su centro de masa, ya que en este caso $I = md^2$.

Ejemplo 11.5. Una barra uniforme de masa *M* y largo *L* tiene un pivote en uno de sus extremos, como se muestra en la figura 11.6, y oscila en un plano vertical con una pequeña amplitud. Calcular el periodo de la oscilación.

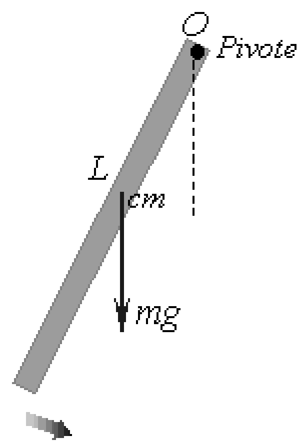

Figura 11.6 Ejemplo 11.5

Solución: la barra oscila como un péndulo físico, su periodo es:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{3}ML^2}{Mg\frac{L}{2}}} = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}}$$

11.4.3. Péndulo de torsión.

Un péndulo de torsión, es un sistema construido de la siguiente forma. Consta de una varilla vertical que por el extremo superior se fija a un soporte y en el extremo opuesto se encuentra unida a un cuerpo rígido, como se muestra en la figura 11.7. Cuando a la varilla se la retuerce y luego se la deja girar, ejerce un torque de restitución sobre el cuerpo rígido, proporcional al desplazamiento angular θ, que se puede escribir como:

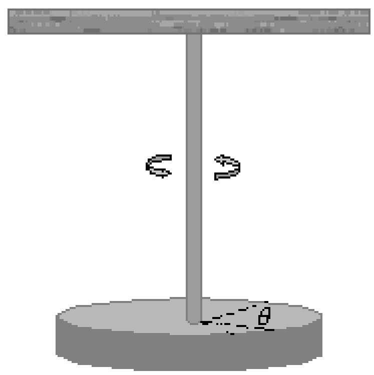

Figura 11.7 Péndulo de torsión.

$$\tau = -\kappa\theta$$

donde κ es la *constante de torsión* de la varilla de soporte. Por la segunda ley de Newton, se obtiene:

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\kappa\theta \Rightarrow$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{\kappa}{I}\theta \qquad (11.13)$$

que es la ecuación de un movimiento armónico simple, de frecuencia y periodo, respectivamente:

$$\omega = \sqrt{\frac{\kappa}{I}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\kappa}}$$

Para este péndulo no se tiene la restricción de un ángulo pequeño, sólo se debe tener cuidado que no se exceda el límite elástico de la varilla. Este péndulo es común en los relojes mecánicos, que produce el tictac, tictac, tictac, tictac...

11.5. OSCILACIONES AMORTIGUADAS.

Los movimientos oscilatorios hasta aquí considerados se refieren a sistemas ideales, que oscilan indefinidamente por la acción de una fuerza lineal de restitución, de la forma $F = -kx$. Pero en los sistemas reales están presentes fuerzas disipativas, como la fricción, las cuales retardan el movimiento del sistema. Por lo tanto la energía mecánica del sistema se va perdiendo conforme transcurre el tiempo, lo que hace que la amplitud del sistema disminuya con el tiempo, y se dice que el movimiento es amortiguado.

Un tipo común de fuerza de fricción es proporcional a la rapidez y actúa en dirección opuesta al movimiento. Estas fuerzas se producen frecuentemente en los fluidos, principalmente en líquidos y gases, aquí se llaman fuerzas de viscosidad, donde actúan cuando un cuerpo se mueve, por ejemplo en el agua o en el aire. Se expresan en la forma $F = - bv$, donde b es una constante que mide el grado de viscosidad del fluido. Aplicando la segunda ley de Newton a un sistema amortiguado, donde sobre el cuerpo en movimiento oscilatorio actúan las fuerzas de restitución y de amortiguamiento o de viscosidad, se obtiene:

$$-kx - bv = ma \Rightarrow$$

$$-kx - b\frac{dx}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2} \tag{11.14}$$

La solución de esta ecuación esta fuera del alcance de este libro, por lo que se da sin demostración. Cuando la fuerza de viscosidad es pequeña comparada con *kx*, es decir, cuando *b* es pequeña, la solución es:

$$x = Ae^{-\frac{b}{2m}t}\cos(\omega t + \delta) \tag{11.15}$$

donde la frecuencia del movimiento es:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} \tag{11.16}$$

En la figura 11.8 se grafica la posición *x* en función del tiempo *t* para este movimiento amortiguado. Se observa que cuando la fuerza disipativa es pequeña comparada con la fuerza de restitución, el carácter oscilatorio del movimiento se mantiene, pero la amplitud de la oscilación disminuye con el tiempo, hasta que finalmente el movimiento se amortigua y detiene. La línea de trazos en la figura 11.8 que es la envolvente de la curva de oscilación, representa el factor exponencial en la ecuación 11.15, corresponde a la amplitud decreciente en el tiempo.

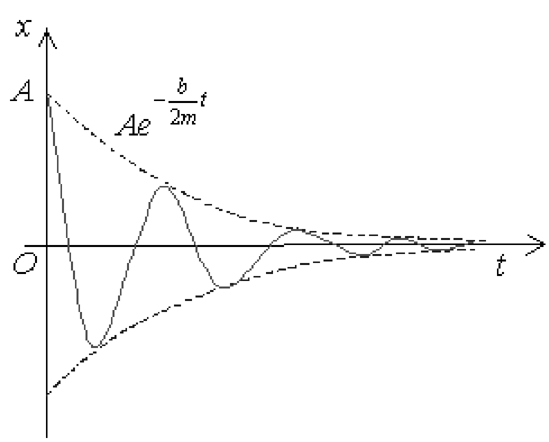

Figura 11.8 Gráfico posición tiempo en las oscilaciones amortiguadas.

De la ecuación de la frecuencia se observa que si $b = 0$, se tiene la frecuencia natural de vibración del oscilador no amortiguado, $\omega_o^2 = k/m$. Cuando la magnitud de la fuerza de fricción se aproxima más a la magnitud de la fuerza de restitución, las oscilaciones se amortiguan más rápidamente. Cuando *b* alcanza un valor crítico tal que $b/2m = \omega_o$, el sistema no oscila y se dice que está críticamente amortiguado, por lo que el sistema regresa al equilibrio en forma exponencial con el tiempo. Si el medio es tan viscoso que la fuerza de fricción es mayor que la de restitución, con lo cual $b/2m > \omega_o$, el sistema está sobreamortiguado. En este caso tampoco oscila, sino que simplemente regresa a su posición de equilibrio. En todos los casos, cuando hay fricción presente, la energía del oscilador disminuye hasta cero; la energía mecánica que se pierde se transforma en el medio en energía térmica.

11.6. OSCILACIONES FORZADAS.

Para el caso de un oscilador amortiguado, la energía disminuye en el tiempo por efecto de la fuerza disipativa. Se puede compensar esta pérdida y entregar energía al sistema aplicando una fuerza externa que en cualquier instante actúe en la dirección del movimiento del oscilador, que debe hacer un trabajo positivo sobre el sistema. La amplitud del movimiento permanecerá constante si la energía de entrada al sistema en cada ciclo del movimiento es igual a la energía que se pierde por la fricción.

Un oscilador forzado se puede obtener cuando un oscilador amortiguado es impulsado por una fuerza externa que varia armónicamente en el tiempo, de la forma $F = F_o \cos\omega t$, donde ω es la frecuencia angular de la fuerza y F_o es una constante. Agregando esta fuerza a la ecuación diferencial del oscilador amortiguado, se obtiene:

$$F_o \cos\omega t - kx - b\frac{dx}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2} \tag{11.17}$$

Ya sabemos que la solución de esta ecuación es complicada, por lo que damos su resultado sin demostración; en un curso mas avanzado de Mecánica Clásica ustedes van a tener amplias posibilidades de entretenerse resolviendo ecuaciones como esta. Después de un tiempo suficientemente largo, cuando la energía de entrada en cada ciclo es igual a la energía perdida en cada ciclo, se alcanza la condición de estado estacionario, donde las oscilaciones se producen con amplitud constante. En esas condiciones, la solución de la ecuación diferencial 11.17 es:

$$x = A\cos(\omega t + \delta)$$

donde la amplitud es:

$$A = \frac{F_o/m}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_o^2)^2 + \left(\frac{b\omega}{m}\right)^2}} \tag{11.18}$$

con $\omega_o^2 = k/m$, la frecuencia del oscilador no amortiguado ($b = 0$). Estas soluciones se justifican, pues físicamente en estado estacionario el oscilador debe tener la misma frecuencia de la fuerza externa aplicada. Se puede comprobar que x es solución si se reemplaza en la ecuación diferencial 11.17, esta se satisface cuando la amplitud es la ecuación 11.18.

En la ecuación 11.18 se observa que el movimiento del oscilador forzado no es amortiguado, ya que se está impulsando por una fuerza externa, pues la condición es que el agente externo entregue la energía necesaria para compensar la energía que se pierde por fricción. Observar que la masa oscila con la frecuencia ω de la fuerza impulsora. Para un amortiguamiento pequeño, la amplitud aumenta cuando la frecuencia de la fuerza impulsora se aproxima a la frecuencia natural de la oscilación, o cuando $\omega \approx \omega_o$. El aumento tan significativo de la amplitud cerca de la frecuencia natural se conoce como ***resonancia***, y la frecuencia ω_o se llama ***frecuencia de resonancia*** del sistema.

En la figura 11.9 se muestra una gráfica de la amplitud como función de la frecuencia para un oscilador forzado con y sin fuerza de fricción. Notar que la amplitud aumenta cuando disminuye el amortiguamiento ($b \to 0$). Además la curva de resonancia se ensancha al aumentar el amortiguamiento. En condiciones de estado estacionario, y a cualquier frecuencia de impulso, la energía transferida es igual a la energía que se pierde por la fuerza de amortiguamiento, por eso la energía total promedio del oscilador permanece constante. En ausencia de fuerzas de amortiguamiento ($b = 0$), de la ecuación 11.18 se observa que, en estado estacionario, A aumenta hasta el infinito cuando $\omega \to \omega_o$. Es decir, si no hay pérdidas en el sistema, y se continua impulsando un oscilador que se encontraba inicialmente en reposo, con una fuerza senoidal que se encuentra en fase con la velocidad, la amplitud crecerá sin límite. Esto no se produce en la realidad ya que siempre están presentes las fuerzas de fricción, aunque sean pequeñas, por lo tanto, en la resonancia la amplitud será grande, pero finita para pequeños amortiguamientos.

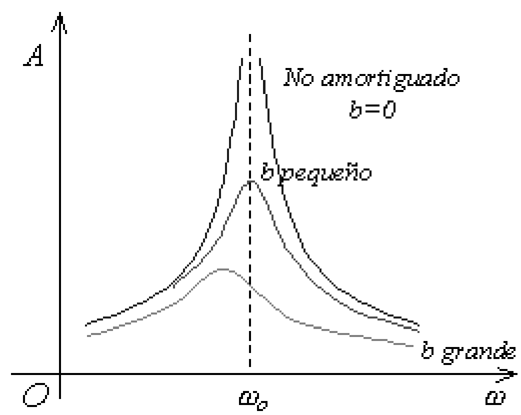

Figura 11.9 Gráfico de la amplitud en función de la frecuencia para un oscilador forzado con y sin fuerza de fricción.

PROBLEMAS.

11.1 El desplazamiento de una partícula está dado por la ecuación $x = 4\cos(3\pi t + \pi)$, donde *x* esta en m y *t* en s. Calcular: a) la frecuencia y el periodo del movimiento, b) la amplitud del movimiento, c) la constante de fase, d) la posición de la partícula en $t = 0$ y 5s, e) la rapidez y aceleración en cualquier instante, f) la rapidez y aceleración máximas, g) la rapidez y aceleración en $t = 0$ y 5 s. R: a) 1.5 Hz, 0.667 s, b) 4 m, c) π rad, d) -4 m.

11.2 Una partícula oscila con un movimiento armónico simple de tal forma que su desplazamiento varia de acuerdo con la expresión $x = 5\cos(2t + \pi / 6)$, donde *x* esta en cm y *t* en s. Calcular: a) la frecuencia y el periodo del movimiento, b) la amplitud del movimiento, c) la posición de la partícula en $t = 0$, d) la rapidez y aceleración en $t = 0$. R: a) π s, b) 5 cm, c) 4.33 cm, d) -5 cm/s, -17.3 cm/s^2.

11.3 Una partícula que se mueve con movimiento armónico simple recorre una distancia total de 20 cm en cada ciclo, y su máxima aceleración es de 50 m/s^2. Calcular: a) la frecuencia angular, b) su máxima rapidez.

11.4 El desplazamiento de una partícula está dado por la ecuación $x = 8\cos(2t + \pi / 3)$, donde *x* esta en cm y *t* en s. Calcular: a) la frecuencia y el periodo del movimiento, b) la amplitud del movimiento, c) la constante de fase, d) la posición, la rapidez y aceleración de la partícula en $t = \pi/2$ s, e) la máxima rapidez y el tiempo mas corto en alcanzarla, f) la máxima aceleración y el tiempo mas corto en alcanzarla. R: d) 13.9 cm/s, 16 cm/s^2, e) 16 cm/s, 0.263 s, f) 32 cm/s^2, 1.05 s.

11.5 Una partícula que se mueve con movimiento armónico simple, en $t = 0$ se encuentra en $x_o = 2$ *cm*, con rapidez $v_o = -24$ *cm/s*. Si el periodo del movimiento es 0.5 s, calcular: a) la constante de fase, b) la amplitud, c) la posición, la rapidez y aceleración en función del tiempo, d) la rapidez y aceleración máximas.

11.6 Una partícula que se mueve con movimiento armónico simple a lo largo del eje *x*, empieza desde el origen en $t = 0$ y se mueve hacia la derecha. Si la amplitud de su movimiento es de 2 cm y la frecuencia 1.5 Hz, calcular: a) la posición en función del tiempo, b) la máxima rapidez y el tiempo mas corto en alcanzarla, c) la máxima aceleración y el tiempo mas corto en alcanzarla, d) la distancia total recorrida entre $t=0$ y $t=1s$. R: a) 2 sen($3\pi t$), b) $6\pi cm/s$, 0.33s, c) $18\pi^2$cm/s^2, 0.5s, d) 12cm.

11.7 Un pistón, de masa 2kg, en un motor de automóvil tiene un movimiento armónico simple, con una amplitud de 5 cm. Calcular la rapidez y la aceleración máximas del pistón cuando se mueve a 3600 rev/min.

11.8 Un peso de 0.2 N se suspende de un resorte de constante 6 N/m. Calcular el desplazamiento del resorte. R: 3.33 cm.

11.9 Un resorte se alarga 4 cm cuando se le cuelga una masa de 10 gramos. Si se le cuelga una masa de 25 gramos, oscila con un movimiento armónico simple. Calcular el periodo del movimiento.

11.10 La frecuencia de vibración de un sistema masa-resorte es de 5 Hz cuando se le cuelga una masa de 4 gramos. Calcular la constante del resorte. R: 3.95 N/m.

11.11 Una masa de 1 kg sujeta a un resorte de constante 25 N/m, oscila en una superficie horizontal sin fricción. La masa se suelta desde el reposo en el instante $t = 0$, donde el resorte se encuentra comprimido en la posición en $x = -3cm$. Calcular: a) el periodo, b) la rapidez y aceleración máxima, c) la posición, la rapidez y aceleración en función del tiempo.

11.12 A un oscilador armónico simple le toma 12 s completar 5 vibraciones. Calcular a): el periodo, b) la frecuencia, c) la frecuencia angular. R: a) 2.4 s, b) 0.417 Hz, c) 2.62 rad/s.

11.13 Un sistema masa-resorte oscila de tal forma que su posición está dada por $x = 0.25cos(2\pi t)$, donde x esta en m y t en s. Calcular: a) la rapidez y aceleración de la masa cuando $x = -0.1\ m$, b) la rapidez y aceleración máximas.

11.14 Una masa de 0.5 kg sujeta a un resorte de constante 8 N/m, oscila con movimiento armónico simple, con una amplitud de 10 cm. Calcular a) la rapidez y aceleración máximas, b) la rapidez y aceleración cuando la masa se encuentra en $x = 6\ cm$ de la posición de equilibrio, c) el tiempo que demora la masa en moverse entre $x = 0$ y $x = 8\ cm$. R: a) 0.4 m/s, 1.6 m/s^2, b) ±0.32 m/s, -9.6 m/s^2, c) 0.232 s.

11.15 Una partícula sujeta a un resorte vertical, se estira hacia abajo una distancia de 4 cm desde su posición de equilibrio y se suelta desde el reposo. La aceleración inicial hacia arriba de la partícula es 0.3 m/s^2. Calcular a) el periodo de las oscilaciones siguientes, b) la rapidez cuando pasa por la posición de equilibrio. c) Escribir la ecuación de movimiento de la partícula.

11.16 Una masa de 0.2 kg sujeta a un resorte oscila con movimiento armónico simple, con un periodo de 0.25s. Si la energía total del sistema es 2 J, calcular a) la constante del resorte, b) la amplitud del movimiento.

11.17 Un sistema masa-resorte oscila con una amplitud de 3.5 cm. Si la constante del resorte es 250 N/m, y la masa de 0.5 kg, calcular a) la energía mecánica del sistema, b) la rapidez máxima de la masa, c) la aceleración máxima. R: a)0.153 J, b) 0.783 m/s, c) 17.5 m/s^2.

11.18 La amplitud de un sistema moviéndose con un movimiento armónico simple se duplica. Calcular la variación en: a) la energía total, b) la rapidez máxima, c) la aceleración máxima, d) el periodo. R: a) cuadruplica, b) duplica, c) duplica, d) no cambia.

11.19 Un sistema masa-resorte tiene un movimiento armónico simple en una superficie horizontal sin fricción, con una amplitud de 12 cm. Si la constante del resorte es 50 N/m, calcular: a) la energía total del sistema, b) la energía cinética del sistema cuando la masa está a 9 cm de la posición de equilibrio, c) la energía potencial cuando la posición es $x=9\ cm$.

11.20 Una partícula tiene un movimiento armónico simple con una amplitud de 3 cm. Calcular la posición respecto al punto medio de su movimiento donde la rapidez será igual a la mitad de la rapidez máxima. R: ±2.6cm.

11.21 Un bloque de 50 g se sujeta al extremo libre de un resorte ideal que tiene una fuerza de restitución de 40 N por cada metro de extensión. El bloque se puede deslizar libre sobre una superficie horizontal sin fricción, se pone en movimiento dándole una energía potencial inicial de 2 J y una energía cinética inicial de 1.5 J. a) Dibujar la gráfica de la energía potencial del sistema para valores en el rango $-0.5m \leq x \leq +5m$. b) Calcular la amplitud de la oscilación del gráfico y en forma analítica. c) Calcular la rapidez del bloque cuando pasa por la posición de equilibrio. d) Calcular la posición donde la energía cinética es igual a la energía potencial. e) Calcular la frecuencia angular y el periodo. f) Si el desplazamiento inicial fue $x > 0$ y la rapidez inicial fue $v < 0$, calcular el ángulo de fase. g) Escribir la ecuación de movimiento $x(t)$.

11.22 Un péndulo simple tiene un periodo de 2.5 s. Calcular: a) su longitud, su periodo si estuviera en la Luna, donde $g = 1.67\ m/s^2$. R: a) 1.55 m, b) 6.1 s.

11.23 Calcular la frecuencia y el periodo de un péndulo simple de 10 m de longitud.

11.24 Si la longitud de un péndulo simple se cuadruplica, ¿que sucede con la frecuencia y el periodo? R: se divide en partes iguales, se duplica.

11.25 Un péndulo simple de longitud 2 m oscila de acá para allá y de allá para acá. Calcular el número de oscilaciones que hará en 5 minutos.

11.26 Un péndulo simple que tiene una masa de 0.25 kg y una longitud 1 m, se desvía un ángulo de 15º y se suelta. Calcular: a) la rapidez máxima, b) la aceleración angular máxima, c) la máxima fuerza de restitución. R: a) 0.82 m/s, b) 2.57 rad/s^2, c) 0.64 N.

11.27 Una barra uniforme se encuentra pivoteada en un extremo como se muestra en la figura 11.6. Si la barra oscila con un movimiento armónico simple, calcular su longitud para que su periodo sea igual al de un péndulo simple de 1 m de longitud.

11.28 Un aro circular de radio R oscila sobre el filo de un cuchillo. Demuestre que su periodo de oscilación es el mismo que el de un péndulo simple de longitud $2R$.

11.29 Un péndulo físico en forma de cuerpo plano tiene un movimiento armónico simple con una frecuencia de 1.5 Hz. Si tiene una masa de 2.2 kg y el pivote se encuentra a 0.35 m del centro de masa, calcular el momento de inercia del péndulo. R: 0.085 kgm^2.

11.30 Una varilla delgada tiene una masa *M* y una longitud de 1.6 m. Uno de los extremos de la varilla se sujeta en un pivote fijo, en torno al cual oscila la varilla. a) Calcular la frecuencia de estas oscilaciones. Si se agrega una partícula de masa *M* al extremo final de la varilla, b) calcular el factor en el que cambiará el periodo.

11.31 Un volante de un reloj tiene un periodo de oscilación de 0.25 s. El volante se construyo de tal manera que 20 g de masa están concentrados alrededor de un aro de 0.5cm de radio. Calcular: a) el momento de inercia del volante, b) la constante de torsión del resorte sujeto al volante. R: a) 5×10^{-7} kgm^2, b) 3.16×10^{-4} Nm/rad.

11.32 Un péndulo de 1 m de longitud se suelta desde un ángulo inicial de 15º. Después de 1000 s su amplitud se reduce por la fricción a 5º. Calcular el valor de *b/2m*. R: 1×10^{-3} s

11.33 Demuestre que la constante de amortiguamiento *b* tiene unidades *kg/s*.

11.34 Demuestre que la ecuación 11.15 es una solución de la ecuación 11.14, siempre y cuando $b^2 < 4mk$.

11.35 Demuestre que la rapidez de cambio de la energía mecánica para un oscilador amortiguado, no impulsado, esta dada por $dE/dt = -bv^2$ y por lo tanto siempre es negativa.

11.36 Una masa de 2 kg sujeta a un resorte de constante 20 N/m, se impulsa por una fuerza externa de la forma $F = 3cos(2\pi t)$, donde *F* esta en N y *t* en s. Calcular: a) el periodo del movimiento, b) la amplitud. Suponga que no hay amortiguamiento, es decir que $b = 0$.

11.37 Calcular la frecuencia de resonancia de los siguientes sistemas: a) una masa de 3 kg sujeta a un resorte de constante 240 N/m, b) un péndulo simple de 1.5 m de longitud. R: a) 1.42 Hz, b) 0.41 Hz.

11.38 Considere un oscilador forzado no amortiguado ($b = 0$), y demuestre que la ecuación 11.1 es solución de la ecuación 11.17 con una amplitud dada por la ecuación 11.18.

11.39 Un peso de 40 N se suspende de un resorte de constante 200 N/m. El sistema no está amortiguado y se impulsa por una fuerza armónica de frecuencia 10 Hz, dando por resultado un movimiento armónico de amplitud 2 cm. Calcular el valor máximo de la fuerza aplicada. R: 318 N.

11.40 Un péndulo de longitud L y masa M, tiene conectado un resorte de constante k a una distancia h por debajo del punto de suspensión, como se muestra en la figura 11.10. Calcular la frecuencia de vibración del sistema para valores pequeños de la amplitud. Suponga que tanto el soporte vertical como el resorte son rígidos de masa despreciable. R: $f = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{MgL + kh^2}{ML^2}}$.

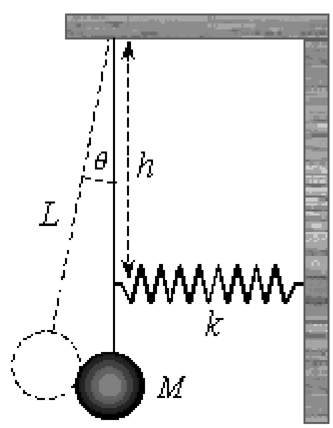

Figura 11.10. Problema 11.40.