CAPITULO 10. NOCIONES DE MECANICA DE FLUIDOS.

10.1 ESTRUCTURA DE LA MATERIA.

En Griego, *átomo* significa indivisible, por eso esta palabra fue adoptado por los físicos para aplicarla a la partícula más pequeña y fundamental. Pero ahora se sabe que los elementos químicos están formados por partículas elementales más pequeñas que son los electrones, protones y neutrones, que en conjunto constituyen el átomo. Los átomos de la materia común, que tienen un diámetro del orden de 10^{-10} *m*, se componen de un núcleo pesado, de diámetro del orden de 10^{-15} *m*, que contiene protones cargados positivamente y neutrones sin carga, que esta normalmente rodeado por uno o varios electrones livianos cargados negativamente. La función de los neutrones es actuar como 'pegamento' para mantener unidos los protones en el núcleo, si los neutrones no estuvieran presente, la fuerza repulsiva entre las partículas cargadas positivamente desintegraría al núcleo.

La masa del protón, $1.67x10^{-27}$ *kg*, que se define como la ***unidad de masa atómica u***, y su carga, $1.6x10^{-19}$ *Coulomb,* se usan como unidad. El átomo mas simple es el hidrógeno neutro, su modelo clásico se muestra en la figura 10.1a, su núcleo tiene un protón y se dice que tiene número de masa 1 y carga eléctrica +1. Alrededor del núcleo del átomo de hidrógeno neutro, orbita un electrón, que tiene carga igual a –1, una masa de $9.1x10^{-31}$ *kg,* igual a *u*/1840, con un radio de la órbita de $0.5x10^{-10}$ *m*.

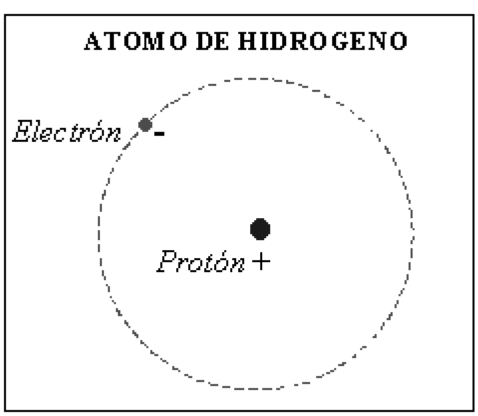

Figura 10.1a

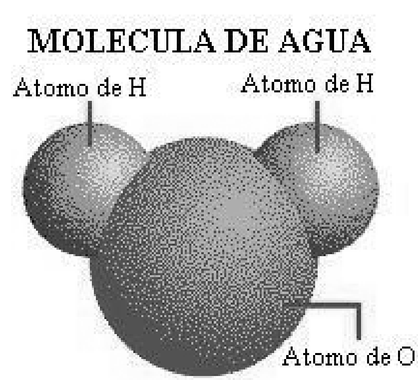

Figura 10.1b

La materia común, como el aire o agua, se compone de moléculas que son eléctricamente neutras. Una molécula puede tener un solo átomo o bien puede ser la unión de dos o más átomos. Existen moléculas compuestas de cientos, miles, incluso millones de átomos. En la figura 10.1b se muestra un esquema de una molécula de agua.

¿Pero termina aquí la división? Se ha descubierto que existen partículas más pequeñas aún, llamadas ***quarks***, formadas por seis variedades diferentes de otras partículas bautizadas con nombres exóticos: *arriba, abajo, extraño, encanto, belleza* y *superior*. Pero la materia no es continua, ya que entre cada par de partículas hay un enorme espacio vacío. Aún así ¡las distancias en la frontera de la Física nuclear son sorprendentemente cortas! En el otro extremo, las distancias en el Universo son súperrequetecontrahiper grandes. Los extremos de la Física los podemos resumir en los tres infinitos, que se ilustran en la figura 10.2.

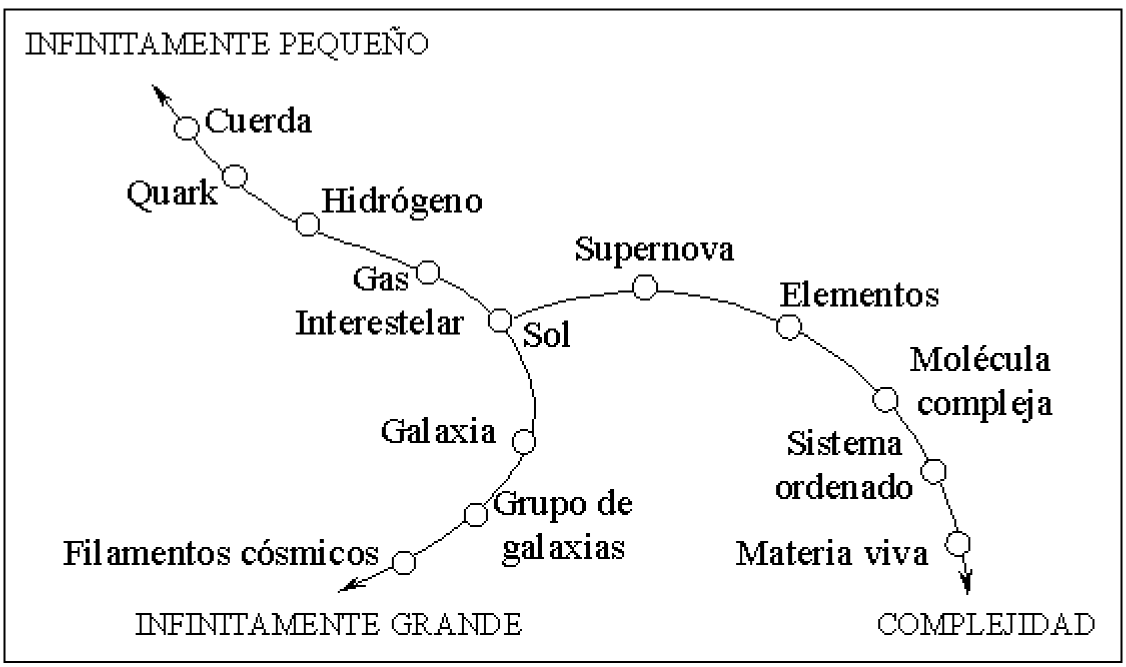

Figura 10.2 Los tres infinitos

Además ¿por qué habrían de existir únicamente partículas livianas con carga negativa y partículas pesadas con carga positiva? Cuando se resuelven las ecuaciones de la mecánica cuántica, generalmente se encuentran dos soluciones simétricas, una da los resultados del comportamiento de la materia, pero no hay ninguna razón para descartar la otra solución, por lo tanto se propuso que describía el comportamiento de la ***antimateria***, que no se conocía. De acuerdo a las leyes de la física, en el principio todo era simétrico: materia y antimateria estaban presente en el Universo en partes iguales. Se busco la existencia de esta antimateria hasta que se descubrieron las antipartículas elementales: antielectrón o positrón, antiprotón, antineutrón, antiquarks, etc, que tienen la misma masa que las partículas elementales, pero cargas opuestas.

10.1.1 Estados de la materia.

La materia generalmente se clasifica de acuerdo con algunos de los cuatro estados en que se encuentra, sólido, líquido, gaseoso y plasma. Un sólido tiene forma y volumen definidos. Un líquido tiene un volumen definido pero no una forma definida. Un gas no tiene ni volumen ni forma definidos.

Para cualquier sustancia, el estado líquido existe a una temperatura mayor que la del estado sólido, tiene mayor agitación térmica y las fuerzas moleculares no son suficientes para mantener a las moléculas en posiciones fijas y se pueden mover en el líquido. Lo común que tienen los líquidos con los sólidos es que si actúan fuerzas externas de compresión, surgen grandes fuerzas atómicas que se resisten a la compresión del líquido. En el estado gaseoso, las moléculas tienen un continuo movimiento al azar y ejercen fuerzas muy débiles unas con otras; las separaciones promedios entre las moléculas de un gas son mucho más grandes que las dimensiones de las mismas.

Un sólido se comprime bajo la acción de fuerzas externas, pero si estas fuerzas dejan de actuar, tiende a retomar su forma y tamaño original, por esto se dice que tiene elasticidad. Según el tiempo de respuesta del cambio de la forma a una fuerza externa o presión, la materia puede comportarse como un sólido o como un fluido. En algunos casos, el material se comporta en un estado intermedio, como por ejemplo plástico, goma, asfalto, grasa, miel, masilla, etc.

10.1.2 Plasma.

Cuando se calienta un sólido, se transforma en líquido, si se continúa calentando se convierte en gas. Pero si aumenta aún más la temperatura del gas, los choques entre las partículas se vuelven tan violentos que son capaces de variar la estructura de las partículas. Los electrones pueden ser liberados de los átomos produciendo iones cargados positivamente. Las moléculas de un gas pueden romperse al someterlas a la acción de la luz ultravioleta, rayos X, corriente eléctrica o a intenso calor y los electrones pueden ser violentamente separados de la molécula. Al resto de la molécula que le falta uno o más electrones, queda cargada positivamente, se le llama un *ión* y el gas queda ionizado. El gas ionizado formado de electrones con carga negativa y de iones con carga positiva se llama ***plasma***, que es otro estado fluido de la materia, sólo existe a altas temperaturas (mayor que 2000 K). A pesar de ser poco común en la vida cotidiana, es el estado predominante de la materia en el Universo. El Sol, las estrellas o el gas de la luz en un tubo fluorescente están en estado de plasma.

10.1.3 Fluido.

Un fluido es un conjunto de moléculas distribuidas al azar que se mantienen unidas por fuerzas cohesivas débiles y por fuerzas ejercidas por las paredes de un envase. De otra forma, si definimos un fluido como aquellos materiales que no lo son, los fluidos son todos aquellos que no son sólidos. Por lo tanto, son fluidos los líquidos y los gases. Una diferencia esencial entre un fluido y un sólido es que un fluido no soporta esfuerzos tangenciales y los sólidos sí. De acuerdo con esto, los fluidos son sistemas que están en continuo movimiento. En este contexto, la mecánica clásica debe modificarse un poco, por la poca utilidad que tiene aquí el concepto de masa, por lo que esta se reemplaza por otro concepto, llamado densidad, que corresponde a la masa por unidad de volumen.

En los problemas que nos interesan, los fluidos con los que trataremos principalmente son el aire y el agua. Cuando estudiamos la atmósfera y el océano en sus movimientos de escala planetaria, nos referimos a estos como fluidos geofísicos. Por ejemplo el estudio de los ciclones y anticiclones, de la corriente de Humboldt, o en otros planetas de la gran Mancha Roja de Júpiter.

10.2 DENSIDAD.

Una propiedad de cualquier sustancia es su densidad. La ***densidad*** ρ de cualquier material se define como la cantidad de masa m contenida en cada unidad de volumen V. Como la distribución de masa puede variar si se considera el volumen completo de sustancia, se debe definir en forma microscópica la densidad en cada punto del cuerpo en forma diferencial, esto es:

$$\boxed{\rho = \frac{dm}{dV}} \qquad (10.1)$$

La densidad es una magnitud física escalar, su unidad de medida en el SI es kg/m^3. La densidad cambia con la temperatura ya que el volumen depende de la temperatura, por lo que se dan valores bajo condiciones de presión y temperaturas dadas. Si un cuerpo tiene la misma densidad en todo el volumen, es decir es constante, se dice que es homogéneo, en caso contrario es heterogéneo, en este caso el cuerpo tiene una distribución de masa variable dentro del volumen. La densidad de los líquidos (y sólidos) es del orden de 1000 veces la de los gases. En la tabla siguiente se dan los valores de la densidad de algunas sustancias comunes.

MATERIAL	**DENSIDAD** (kg/m^3)
Hidrógeno	0.09
Aire	1.28
Madera de pino	500
Petróleo	800
Hielo	917
Agua	1000
Aluminio	2700
Hierro	7860
Cobre	8900
Plomo	11340
Mercurio	13500
Oro	19300
Platino	21400

La densidad de los fluidos depende de la temperatura y de la presión. La ecuación que expresa esta dependencia se llama ecuación de estado, pero este tema es un aspecto de los fluidos que se tratará en forma cuantitativa en el curso de Física de Termodinámica. Baste decir ahora que la densidad depende del inverso de la temperatura. La variación de densidad con la temperatura en los gases da lugar al fenómeno de convección, muy importante para el transporte de calor en un fluido. Por ejemplo, la convección en la atmósfera produce el movimiento vertical ascendente del aire, lo que origina disminución de presión en superficie, expansión de la masa de aire, enfriamiento por la expansión y el ascenso, condensación por efecto del enfriamiento, formación de nubes debido a la condensación y de precipitación.

10.3 PRESION.

Las fuerzas que existen sobre un objeto sumergido en un fluido son sólo aquellas que tienden a comprimir al objeto. La fuerza ejercida por un fluido sobre el objeto inmerso en él, representado por el cubo de la figura 10.3, es siempre perpendicular a la superficie del objeto. La presión p del fluido en el nivel donde se encuentra sumergido el cuerpo se define como la razón de la magnitud de la fuerza F normal a la superficie y el área A. La presión dentro del fluido no es la misma en todos los puntos, por lo que se debe definir la presión en un punto determinado considerando una fuerza dF normal a un elemento de superficie dA, entonces la presión en el punto es:

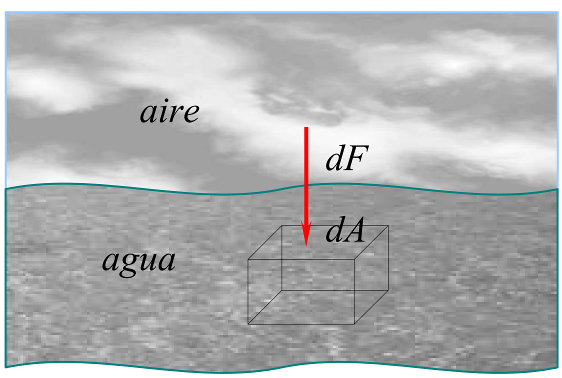

Figura 10.3

$$\boxed{p = \frac{dF}{dA}} \qquad (10.2)$$

La unidad de medida de la presión en el sistema SI es N/m^2, que se llama Pascal, con símbolo Pa. Otras unidades de uso común para la presión son atmósfera (atm), centímetros de mercurio (cm de Hg) o bar. Algunos factores de conversión comunes entre diferentes unidades son:

$$1\ bar = 10^5\ Pa \text{ y } 1\ milibar\ (mbar) = 10^{-3}\ bar = 100\ Pa = 1\ hPa$$

$$1\ atm = 1.013x10^5\ Pa = 1.013\ bar = 1013\ mbar = 1013\ hPa = 76\ cm\ de\ Hg$$

10.4 LA ECUACIÓN HIDROSTATICA.

Para un fluido en reposo dentro de un envase, todos los puntos a la misma profundidad tienen la misma presión, si no fuera así no estaría en reposo. Imaginar un volumen de fluido (aire) elemental en la atmósfera, de superficie dA y alto dz, como se ve en la figura 10.4.

La fuerza en la parte inferior del volumen es vertical hacia arriba de magnitud $F_1 = p_1 dA = p(z)dA$ y en la parte superior es hacia abajo de valor $F_2 = p_2 dA = p(z+dz)dA$. El peso del volumen es $dP = (dm)g$. Como el volumen está en equilibrio, por la primera Ley de Newton, se tiene:

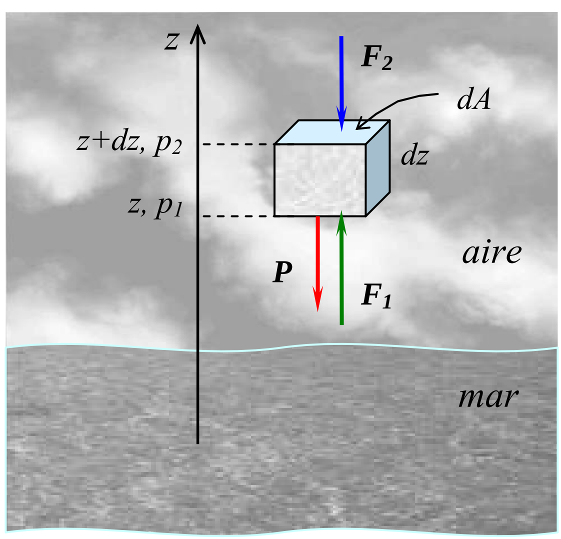

Figura 10.4

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_1 - F_2 - P = 0$$

$$p(z)dA - p(z+dz)dA - (dm)g = 0$$

$$[p(z) - p(z+dz)]dA - (dm)g = 0$$

Pero $p(z+dz) - p(z) = dp$, $\rho = dm/dV \Rightarrow dm = \rho\, dV$ *y* $dV = dAdz$, reemplazando se obtiene:

$$-dpdA - \rho\, dAdz\, g = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{dp}{dz} = -\rho g} \qquad (10.3)$$

Esta se llama ***ecuación hidrostática***, se le da ese nombre porque fue deducida para una porción de fluido en equilibrio estático. Se observa que la presión disminuye con la altura y aumenta con la profundidad en el fluido.

Si p_o es el valor de la presión en el nivel z_o (que puede ser el nivel del mar) y p el valor de la presión a una altura z en la atmósfera o una profundidad z en el océano, y ***si la densidad es constante***, se puede integrar la ecuación hidrostática y se obtiene:

$$p - p_o = -\rho g(z - z_o)$$

Si se considera como volumen de fluido una porción de océano, en cuya superficie actúa la presión atmosférica p_o, la presión a la profundidad $h = z_o - z$ en el mar, lago o cualquier envase que contenga algún líquido de densidad constante, será:

$$p = p_o + \rho g(z_o - z)$$

$$p = p_o + \rho gh$$

Esta ecuación, que es válida sólo cuando la densidad es constante, dice que la presión a la profundidad h de la superficie libre de un fluido es mayor que la presión atmosférica p_o en ρgh. De esto también se deduce que la presión es la misma en cualquier punto ubicado a la misma profundidad y no se ve afectada por la forma del envase. El término ρgh se llama ***presión manométrica***, ya que corresponde a la presión obtenida de la lectura de un ***manómetro***, es decir, la diferencia entre la presión total y una presión de referencia, que con frecuencia es la presión atmosférica.

La presión del agua aumenta a medida que se baja hacia el fondo del océano y disminuye en la atmósfera si nos elevamos sobre el nivel del mar. Como la densidad del aire es unas 1000 veces menor que la del agua, el aumento de presión al descender un metro en agua es cerca de mil veces mayor a la disminución de la presión al ascender un metro de altura. En la atmósfera cerca de superficie, la presión disminuye aproximadamente un hPa cada 10 metros de elevación en la vertical y en el océano la presión aumenta aproximadamente 100 hPa cada un metro de profundidad.

Ejemplo 10.1. *Calcular la fuerza resultante ejercida por el agua sobre una represa de profundidad H y de ancho D, que se muestra en la figura 10.5.*

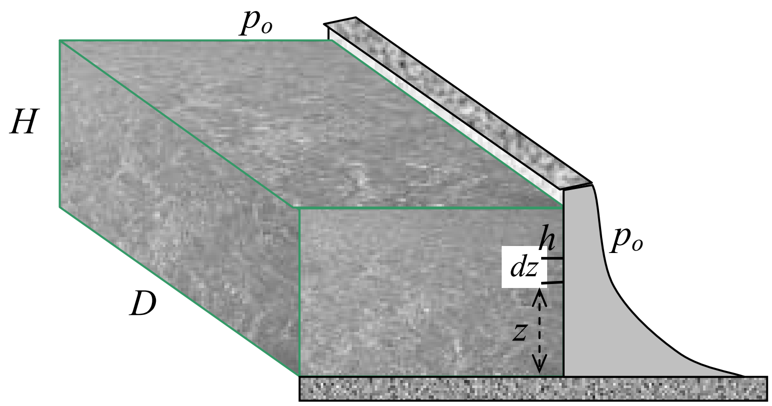

Figura 10.5. Esquema de una represa.

Solución. La coordenada vertical z se mide desde el fondo de la represa hacia arriba, entonces la profundidad H de la represa es igual a z_o. La presión a una profundidad h medida desde la superficie del agua hacia abajo, como se ve en la figura 10.5, se calcula usando la ecuación hidrostática, teniendo en cuenta que la presión atmosférica p_o actúa en todos lados sobre la represa, por lo que no altera el valor de p, el cálculo da:

$$p - p_o = \rho g(z_o - z) \Rightarrow$$

$$p - p_o = \rho g(H - z)$$

Pero $dF = (p-p_o)dA = \rho g(H-z)Ddz$, integrando se tiene,

$$F = \int dF = \int pdA = \int_o^H \rho g(H - z)Ddz = \frac{1}{2}\rho g D H^2$$

Como la presión aumenta con la profundidad, las represas se deben construir aumentando su espesor con la profundidad.

10.4.1 El barómetro.

Los instrumentos usados para medir la presión son el barómetro y el manómetro. El barómetro de mercurio, inventado en 1643 por Torricelli (que fue alumno de Galileo) es un tubo cerrado en uno de sus extremos que se llena con mercurio (Hg) y después se da vuelta y se introduce en otro envase lleno también con mercurio (figura 10.6a). En este proceso, el mercurio del tubo desciende por lo que en su extremo cerrado se produce un vacío, donde la presión es cero. Por la presión de la atmósfera sobre la superficie libre del envase, la columna de mercurio dentro del tubo se eleva; al nivel del mar en condiciones normales, se encuentra que siempre la columna de mercurio en el tubo es de 76 cm. De la ecuación hidrostática integrada se obtiene $-p_o = -\rho gh$, donde ρ es la densidad del mercurio y h su altura. Con $g = 9.8\ m/s^2$ y la densidad del mercurio que es 13595 kg/m^3, se obtiene que la presión atmosférica en condiciones normales es $p_o = 1.013x10^5\ Pa$.

El manómetro es un tubo en U abierto a la atmósfera en uno de sus extremos, que contiene un líquido y en el otro extremo se conecta a un sistema de presión desconocida (figura 10.6b). La presión p se llama presión absoluta y la diferencia de presión $p - p_o = \rho gh$ se llama presión manométrica.

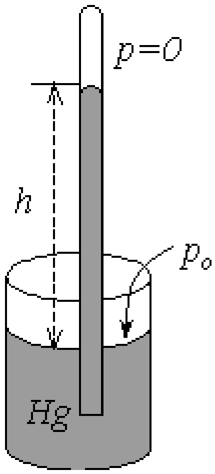

Figura 10.6a Barómetro de mercurio.

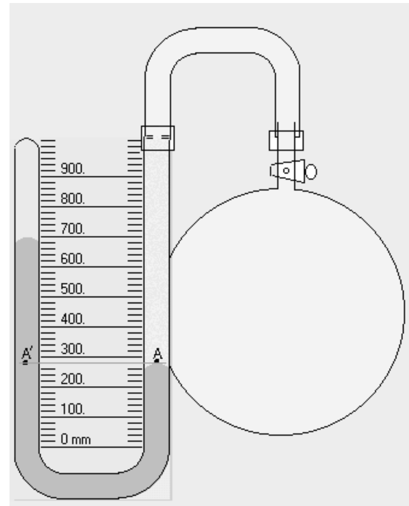

Figura 10.6b Manómetro

10.5 LEY DE PASCAL.

Según la ecuación hidrostática, la presión en un fluido sólo depende de la profundidad, por lo tanto cualquier variación de presión en superficie se transmite a cualquier parte del fluido. Entonces si se aplica una fuerza F_1 sobre un área A_1 como se ve en la figura 10.7, la misma presión se transmite con una fuerza F_2 sobre un área A_2, y por la definición de presión:

$$p = \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} \qquad (10.4)$$

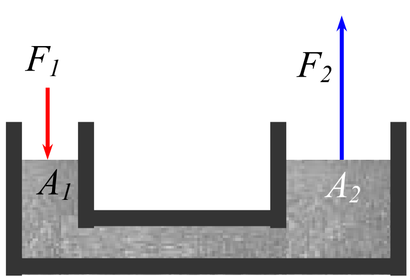

Figura 10.7

Las herramientas hidráulicas tales como frenos, gatas y elevadores de carga aprovechan este principio descubierto por Blas Pascal y se conoce como ***Ley de Pascal.***

Ejemplo 10.2. *En un elevador de carga el aire comprimido ejerce una fuerza sobre un pequeño émbolo de área circular de 5 cm de radio, que se transmite por agua a otro émbolo de 20 cm de radio. Calcular la fuerza que se debe ejercer al aire comprimido para levantar un auto de 10000 N y la presión que ejercería esa fuerza.*

Solución: por la ley de Pascal, tenemos

$$F_1 = \frac{A_1}{A_2} F_2 = \frac{\pi 5^2}{\pi 20^2} 10000$$

$$F_1 = 625 \text{ N}$$

Notar que el valor de la fuerza necesaria, equivalente a la ejercida por una masa de 62.5 kg, es pequeña comparada con la carga a levantar.

$$p = \frac{F_1}{A_1} = \frac{625 \text{ N}}{\pi (0.05\, m)^2} = 7.9 \times 10^4 \text{ Pa} = 790 \text{hPa}$$

10.6 PRINCIPIO DE ARQUIMEDES.

Una consecuencia de la ecuación hidrostática es el principio de Arquímedes. Supongamos que un objeto se sumerge en un fluido como se ve en la figura 10.4. Antes de sumergir el objeto, el fluido está en equilibrio, por lo tanto el resto del fluido ejerce una fuerza sobre la porción de fluido que después ocupará el objeto, que iguala el peso de la porción de fluido. Esta fuerza también actuará sobre el objeto sumergido y se conoce como fuerza de empuje. El principio de Arquímedes se enuncia como sigue: "***cualquier cuerpo total o parcialmente sumergido en un fluido es empujado hacia arriba por una fuerza que es igual al peso del volumen de fluido desplazado por el cuerpo***".

Cualquier cuerpo inmerso en un fluido es empujado siempre verticalmente hacia arriba por el fluido, a esa fuerza se le llama ***fuerza de empuje (o de flotación), E***. Según el principio de Arquímedes, la magnitud de la fuerza de empuje es igual al peso del volumen de fluido desalojado por el objeto. La fuerza de empuje actúa verticalmente hacia arriba y su línea de acción pasa por el punto donde se encontraba el centro de gravedad del fluido desplazado.

Se puede demostrar que la fuerza de empuje es igual al peso. En efecto, la presión en el fondo de un cubo de fluido imaginario inmerso en el fluido, como se ve en la figura 10.4, es mayor que en la parte superior por la cantidad $\rho g\Delta z$, donde Δz es la altura del cubo de fluido imaginario. Esta diferencia de presión por unidad de área A, es decir la diferencia entre las fuerzas aplicadas en la cara inferior y superior del volumen hipotético, es igual a la fuerza de empuje E, entonces:

$$F_1 - F_2 = E$$

Pero $F_1 = p_1 A$ y $F_2 = p_2 A \quad \Rightarrow \quad (p_1 - p_2)A = E$

Por la ecuación hidrostática: $\quad p_1 - p_2 = \rho g\Delta z \quad \Rightarrow$

$$\rho g\Delta z\, A = E \;\Rightarrow\; E = \rho g\Delta V = mg \;\Rightarrow$$

$$E = P \qquad (10.5)$$

Para un objeto que flota sobre un fluido, la fuerza de empuje equilibra al peso del objeto. Si V es el volumen de fluido desplazado al sumergir el cuerpo en el fluido de densidad ρ, y V_o es el volumen del cuerpo de densidad ρ_o, la fuerza de empuje del fluido, según la ecuación anterior, es $E = \rho Vg$, que es de igual magnitud al peso del cuerpo $P = mg = \rho_o V_o g$, entonces:

$$E = P \Rightarrow \rho Vg = \rho_o V_o g \Rightarrow$$

$$\frac{V}{V_o} = \frac{\rho_o}{\rho} \qquad (10.6)$$

Esta ecuación permite determinar la fracción de volumen de un objeto sumergido en un fluido de mayor densidad que la del objeto.

Ejemplo 10.3. *Calcular la fracción del volumen de un cubo de hielo que sobresale del nivel de agua, cuando flota en un vaso con agua.*

Solución: el hielo flota sobre el agua porque tiene una densidad menor que el agua, $\rho_{hielo} = 917\ kg/m^3$. El peso del cubo de hielo es $P_h = m_h g = \rho_h V_h\, g$. La fuerza de empuje igual al peso del agua desplazada es $E = \rho_a V g$, donde V es el volumen de la parte del cubo de hielo bajo el agua.

Como $P_h = E$, entonces la fracción de hielo sumergido es:

$$\rho V g = \rho_h V_h g = \rho_a V g \Rightarrow \frac{V}{V_h} = \frac{\rho_h}{\rho_a}$$

$$\frac{V}{V_h} = \frac{917}{1000} = 0.917$$

Por lo tanto, lo que sobresale del agua es: $1 - V/V_h = 1 - 0.917 = 0.083$ u 8.3%.

Una corona de oro*.*

Herón II, rey de Siracusa, pidió un día a su pariente Arquímedes, que comprobara si una corona que había encargado a un orfebre local era realmente de oro puro. El rey le pidió también de forma expresa que no dañase la corona. Arquímedes dio vueltas y vueltas al problema sin saber cómo atacarlo, hasta que un día, al meterse en la bañera para darse un baño, se le ocurrió la solución. Pensó que el agua que se desbordaba tenía que ser igual al volumen de su cuerpo que estaba sumergido. Si medía el agua que rebosaba al meter la corona, conocería el volumen de la misma y a continuación podría compararlo con el volumen de un objeto de oro del mismo peso que la corona. Si los volúmenes no fuesen iguales, sería una prueba de que la corona no era de oro puro. A consecuencia de la excitación que le produjo su descubrimiento, Arquímedes salió del baño y fue corriendo desnudo como estaba hacia el palacio gritando : “¡Lo encontré! ¡Lo encontré!”, (“Eureka, Eureka”).

La palabra griega "**¡Eureka!**" utilizada por Arquímedes, ha quedado desde entonces como una expresión que indica la realización de un descubrimiento. Al llevar a la práctica lo descubierto, se comprobó que la corona tenía un volumen mayor que un objeto de oro de su mismo peso. Contenía plata que es un metal menos denso que el oro.

10.7 NOCIONES ELEMENTALES DE DINAMICA DE FLUIDOS.

Ahora analizaremos en forma muy elemental el comportamiento de los fluidos en movimiento. Cuando un fluido está en movimiento, el flujo se puede clasificar en dos tipos:

a) Flujo estacionario o laminar si cada partícula de fluido sigue una trayectoria uniforme y estas no se cruzan, es un flujo ideal. Por ejemplo el humo de cigarrillo justo después de salir del cigarro es laminar. En el flujo estacionario la velocidad del fluido permanece constante en el tiempo. Sobre una velocidad crítica, el flujo se hace turbulento.

b) Flujo turbulento es un flujo irregular con regiones donde se producen torbellinos. Por ejemplo el humo de cigarrillo en la parte superior alejada del cigarro es turbulento.

El flujo laminar se vuelve turbulento por efecto de la fricción que también está presente en los fluidos y surge cuando un objeto o capa del fluido que se mueve a través de él desplaza a otra porción de fluido; lo notas por ejemplo cuando corres en el agua. La fricción interna en un fluido es la resistencia que presenta cada capa de fluido a moverse respecto a otra capa. La fricción interna o roce de un fluido en movimiento se mide por un ***coeficiente de viscosidad***. Por efecto de la viscosidad parte de la energía cinética del fluido se transforma en energía térmica, similar al caso de los sólidos.

Debido a que el movimiento de un fluido real es muy complejo, consideraremos un modelo de fluido ideal con las siguientes restricciones: fluido incompresible, es decir de densidad constante, no viscoso, flujo estacionario e irrotacional, en este último caso se refiere a la rotación de cada partícula de fluido y no del fluido como un todo, que puede tener una trayectoria curva o girar.

10.8 ECUACION DE CONTINUIDAD.

La trayectoria seguida por una partícula de fluido estacionario se llama ***línea de corriente***, así que por definición la velocidad es siempre tangente a la línea de corriente en cualquier punto. Por lo tanto las líneas de corriente no se pueden cruzar, sino en el punto de cruce, la partícula de fluido podría irse por cualquiera de las líneas y el flujo no sería estacionario. Un conjunto de líneas de corriente forma un tubo de corriente o de flujo (figura 10.8), las partículas de fluido se pueden mover sólo a lo largo del tubo, ya que las líneas de corriente no se cruzan.

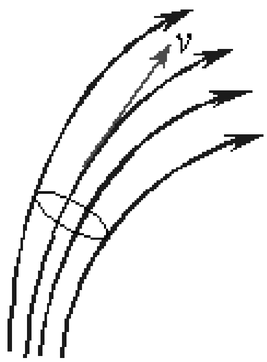

Figura 10.8

Figura 10.9

Considerar un fluido que se mueve a lo largo de un tubo de corriente, cuya sección transversal aumenta en dirección del flujo, como en la figura 10.9. En un intervalo Δt en la sección más angosta del tubo de área A_1, el fluido se mueve una distancia $\Delta x_1 = v_1 \Delta t$. La masa contenida en el volumen $A_1 \Delta x_1$ es $\Delta m_1 = \rho_1 A_1 \Delta x_1$. De manera similar, en la sección ancha del tubo de área A_2, se obtienen expresiones equivalentes en el mismo Δt, cambiando el subíndice 1 por 2. Pero la masa se conserva en el flujo estacionario, esto es la masa que cruza por A_1 es igual a la masa que pasa por A_2 en el intervalo de tiempo Δt, entonces:

$$\Delta m_1 = \Delta m_2 \Rightarrow \rho_1 A_1 \Delta x_1 = \rho_2 A_2 \Delta x_2$$

$$\rho_1 A_1 v_1 \Delta t = \rho_2 A_2 v_2 \Delta t$$

$$\boxed{\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2} \qquad (10.7)$$

Esta se llama ecuación de continuidad, representa la conservación de la masa: significa que la masa no puede ser creada ni destruida, sólo se puede transformar, similar a la conservación de la energía.

Para un fluido incompresible, es decir de densidad constante, la ecuación de continuidad se reduce a:

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 = cte,$$

esto es, el producto del área por la rapidez normal a la superficie en todos los puntos a lo largo del tubo de corriente es constante. La rapidez es mayor (menor) donde el tubo es más angosto (ancho) y como la masa se conserva, la misma cantidad de fluido que entra por un lado del tubo es la que sale por el otro lado, en el mismo intervalo de tiempo. La cantidad Av, que en el SI tiene unidades de m^3/s, se llama ***flujo*** de volumen o caudal $Q = Av$.

Ejemplo 10.4. *Un jardinero está regando el pastito con una manguera de 2 cm de diámetro, por la que puede fluir 30 lt de agua en un minuto. Calcular la rapidez con la cual el agua sale de la manguera.*

Solución: De los datos, el caudal de agua es $Q = 30\ lt/min$, transformando las unidades, se obtiene:

$$Q = 30\frac{lt}{\text{min}} = \frac{30\times 10^3\ \text{cm}^3}{60\,\text{s}} = 500\frac{\text{cm}^3}{\text{s}}$$

el área de la sección transversal de la manguera es:

$$A = \pi r^2 = \pi\,(1cm)^2 = \pi\, cm^2$$

Por lo tanto, la rapidez de salida del agua por la manguera será:

$$Q = Av \Rightarrow v = \frac{Q}{A} = \frac{500\, cm^3/s}{\pi\ \text{cm}^2} = 160\frac{\text{cm}}{\text{s}} = 1.6\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

10.9 ECUACION DE BERNOULLI.

Cuando fluye el fluido por un tubo de sección transversal no uniforme y de un nivel a otro, por la ecuación hidrostática, la presión cambia a lo largo del tubo (figura 10.10). La fuerza de la presión p_1 en el extremo inferior del tubo de área A_1 es $F_1 = p_1 A_1$. El trabajo realizado por esta fuerza sobre el fluido es $W_1 = F_1\Delta x_1 = p_1 A_1 \Delta x_1 = p_1 \Delta V$, donde ΔV es el volumen de fluido considerado. De manera equivalente en el nivel superior, si se considera un mismo intervalo de tiempo, el volumen ΔV de fluido que cruza la sección superior de área A_2 es el mismo, entonces el trabajo es $W_2 = - p_2 A_2 \Delta x_1 = - p_2 \Delta V$. El trabajo neto realizado por las fuerzas en el intervalo de tiempo Δt es:

$$W = W_1 + W_2 = (p_1 - p_2)\Delta V$$

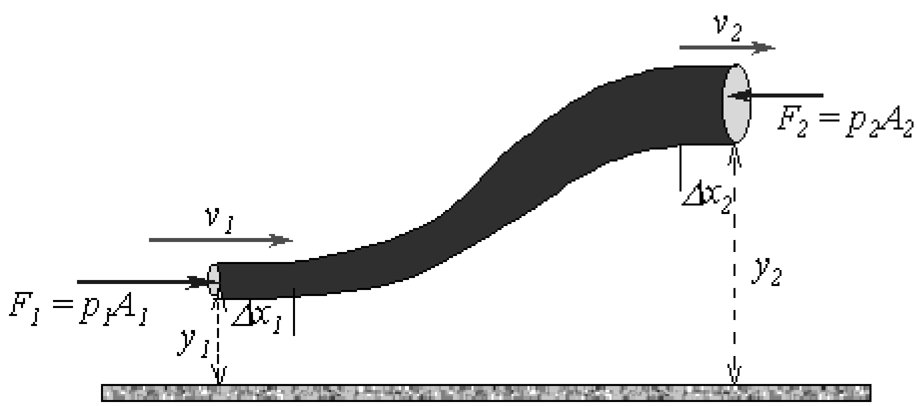

Figura 10.10

Parte de este trabajo se usa en cambiar tanto la energía cinética como la energía potencial gravitacional del fluido. Si Δm es la masa que pasa por el tubo de corriente en el tiempo Δt, entonces la variación de energía cinética es:

$$\Delta E_c = \frac{1}{2}\Delta m v_2^2 - \frac{1}{2}\Delta m v_1^2$$

y la variación de energía potencial gravitacional es:

$$\Delta E_g = \Delta mgy_2 - \Delta mgy_1$$

Por el teorema del trabajo y energía se tiene:

$$W = \Delta E_c + \Delta E_g \Rightarrow$$

$$(p_1 - p_2)\Delta V = \frac{1}{2}\Delta mv_2^2 - \frac{1}{2}\Delta mv_1^2 + \Delta mgy_2 - \Delta mgy_1$$

Dividiendo por ΔV y como $\rho = \Delta m/\Delta V$, se obtiene la ecuación de Bernoulli para un fluido no viscoso, incompresible, estacionario e irrotacional.

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 - \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho gy_2 - \rho gy_1$$

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho gy_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho gy_2$$

La ecuación de Bernoulli, que es un resultado de la conservación de la energía aplicada a un fluido ideal, generalmente se expresa como:

$$\boxed{p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gy = cte.} \qquad (10.8)$$

Ejemplo 10.5: *Demostrar que para un fluido en reposo se obtiene la ecuación hidrostática integrada.*

Solución: si el fluido está en reposo, $v_1 = v_2 = 0$ y de la ecuación de Bernoulli se obtiene:

$$p_1 + \rho g z_1 = p_2 + \rho g z_2 \Rightarrow$$
$$p_1 - p_2 = \rho g z_2 - \rho g z_1 = \rho g h \Rightarrow$$

$$p_2 = p_1 - \rho g h$$

***Ejemplo 10.6: Tubo de Venturi**. Una tubería horizontal con una estrechez, como se muestra en la figura 10.11, que se usa para medir la velocidad del flujo en fluidos incompresibles, se llama tubo de Venturi. Si con un manómetro se mide la presión en los puntos 1 y 2, se puede calcular la rapidez del flujo que sale (o entra) por el tubo.*

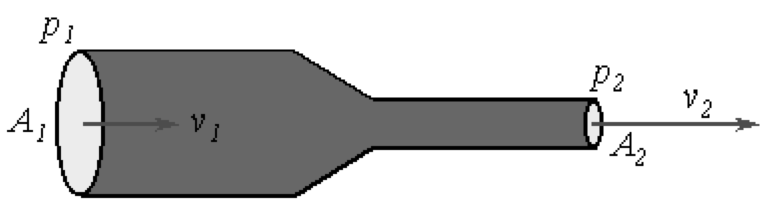

Figura 10.11 Tubo de Venturi.

Solución. Aplicando la ecuación de Bernoulli, como la tubería es horizontal, $y_1 = y_2$, se tiene:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_1 \Rightarrow$$
$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

Con la ecuación de continuidad:

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \Rightarrow v_1 = \frac{A_2}{A_1} v_2$$

Combinando las ecuaciones, queda:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho\left(\frac{A_2}{A_1}v_2\right)^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \Rightarrow$$

$$v_2 = A_1\sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho\left(A_1^2 - A_2^2\right)}}$$

Observar que debido a que $A_1 > A_2$, $p_1 > p_2$, la presión en 1 es mayor que en 2, es decir la presión disminuye en la parte estrecha de la tubería. La disminución de la presión en la parte angosta del tubo tiene varias aplicaciones, por ejemplo, conectando un tubo de Venturi al carburador de un automóvil, se hace entrar el vapor de gasolina a la cámara de combustión.

Ejemplo 10.7: Ley de Torricelli. *Un estanque que contiene un líquido de densidad ρ tiene un orificio pequeño en un lado a una altura y_1 del fondo (figura 10.12. El aire por encima del líquido se mantiene a una presión p. Determinar la rapidez con la cual sale el líquido por el orificio cuando el nivel del líquido está a una altura h sobre el agujero.*

Solución: si se supone que el estanque tiene una superficie mucho mayor que la del agujero $(A_2 >> A_1)$, entonces la rapidez de descenso del fluido es mucho menor que la rapidez de salida del agua por el hoyo $(v_2 << v_1)$. Aplicando la ecuación de Bernoulli en los puntos 1 y 2, con p_1 = *presión atmosférica* = p_o y $p_2 = p$, se tiene:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2 \Rightarrow$$

$$p_o + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p + \rho g\left(y_2 - y_1\right)$$

Como $h = y_2 - y_1$, se tiene:

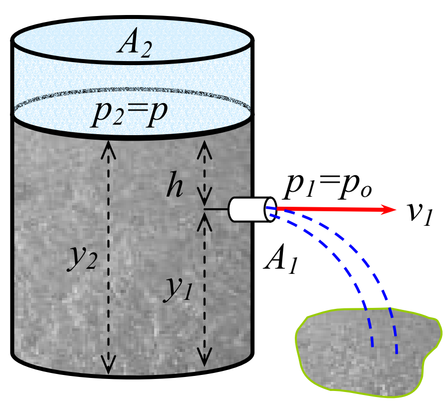

Figura 10.12 Ejemplo 10.7

$$v_1 = \sqrt{\frac{2(p - p_o)}{\rho} + 2gh}$$

Esta ecuación se llama Ley de Torricelli.

Casos particulares:

a) Si $p >> p_o$, entonces $2gh \sim 0$ y $v_1 = \sqrt{2p/\rho}$, esto significa que la rapidez es solo función de la presión.

b) Si $p = p_o$, entonces $v_1 = \sqrt{2gh}$, en este caso la rapidez es idéntica a la adquirida por un cuerpo en caída libre.

Ejemplo 10.8: Tubo de Pitot. *Es uno de los medidores más exactos para medir la rapidez de un gas dentro de una tubería. El equipo, que se muestra en la figura 10.13, consta de un tubo en U con un líquido manométrico, donde la rama "a" en la figura 10.13, se conecta a la tubería y la otra rama "b", cuya abertura está dirigida corriente arriba, se deja en el interior por donde circula el gas con rapidez v, de modo que el fluido ingrese dentro de ésta y suba hasta que la presión aumente lo suficiente dentro del mismo y equilibre el impacto producido por la velocidad.*

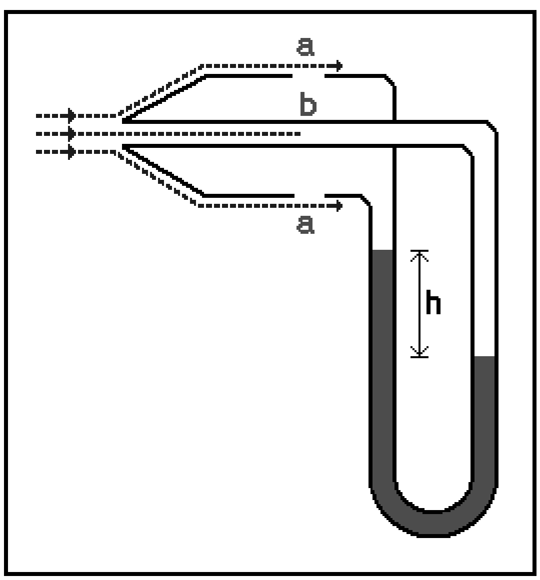

Figura 10.13.Tubo de Pitot.

La presión p_a en la rama a izquierda del tubo, cuya abertura es paralela al movimiento del gas, es igual a la presión del gas. La presión p_b de la otra rama b puede calcularse aplicando la ecuación de Bernoulli a los puntos en a y b, que se consideran ubicados a una misma altura dentro de la tubería. Como la rapidez en el punto b es nula:

$$p_b = p_a + \frac{1}{2}\rho v^2$$

donde ρ es la densidad del gas. Por otra parte, la $p_b > p_a$ por lo que el líquido manométrico dentro del tubo en U se desplaza originando una diferencia de altura h. Sea ρ_o la densidad del líquido manométrico, por lo que:

$$p_b = p_a + \rho_o gh$$

combinando ambas ecuaciones, se obtiene:

$$\rho_o gh = \frac{1}{2}\rho v^2 \Rightarrow$$

$$v = \sqrt{\frac{2\rho_o gh}{\rho}}$$

Los aviones usan sistemas basados en este equipo para determinar su velocidad respecto al aire.

PROBLEMAS.

10.1 Maria se encapricho por tener un par de aros de oro esféricos, grandes y sólidos de 1.25 cm de radio y le pidió a su novio que se los comprara. ¿Cuántos gramos de oro tendrán que soportar sus orejas por caprichosa? R: 158 gr c/u.

10.2 En el centro de un ciclón (esto es un área de bajas presiones donde se cierra una isobara, que es una línea que une puntos de igual presión), se midió un descenso de presión de 10 mm de Hg respecto a la normal, ¿cuánto fue la presión atmosférica? Por el contrario, en un anticiclón (centro de altas presiones) el aumento de presión fue de 12 hPa, ¿a cuánto ascendió la columna de mercurio? R: 1006 hPa, 76.9 cm de Hg.

10.3 Hacer las suposiciones necesarias para calcular la densidad media y la masa de la atmósfera considerando que el 90% de la masa de aire está debajo de la tropopausa. R: aprox. 5.3×10^{18} kg.

10.4 Calcular la densidad del *núcleo* de un átomo. La masa de un protón es de $1.6x10^{-27}$ *kg* y su radio es del orden de 10^{-15} *m*. ¿Qué sugiere este resultado en relación con la estructura de la materia? R: $4x10^{17}$ kg/m^3.

10.5 Paula de 50 kg se balancea sobre uno de los altos tacones de sus zapatos. Si el tacón es circular de radio de 0.5 cm, ¿qué presión ejerce Paula sobre el piso? R: $6.36x10^6$ *Pa.*

10.6 Una piscina tiene una superficie de 30 m x 10 m y un fondo plano. Cuando la piscina está llena a una profundidad de 2 m con agua, ¿cuál es la fuerza total ejercida por el agua sobre el fondo? ¿Sobre cada lado?

10.7 Analizar la utilidad práctica de usar un barómetro de agua.

10.8 El tubo vertical abierto de la figura 10.14 contiene dos fluidos de densidades ρ_1 *y* ρ_2, que no se mezclan. Demuestre que la presión en el fondo del tubo está dada por la expresión $p = p_o + g(\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2)$.

10.9 Un tubo en U abierto en ambos extremos se llena parcialmente con agua. Después se hecha aceite de densidad ρ_{ac} en el brazo derecho del tubo, formando una columna de altura h_1, (figura 10.15). Calcular la diferencia h en las alturas de las dos superficies de líquido.
R: $h_1(1 - \rho_{ac}/\rho_{ag})$.

10.10 Un tubo en U de área de sección transversal constante, abierto a la atmósfera, se llena parcialmente con mercurio. Después se hecha agua en ambos brazos. Si la configuración de equilibrio del tubo es como la mostrada en la figura 10.16, con h_2 conocido, determine el valor de h_1.
R: $h_2(\rho_M/\rho_a - 1)$.

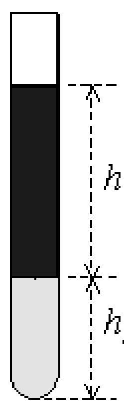

Figura 10.14.

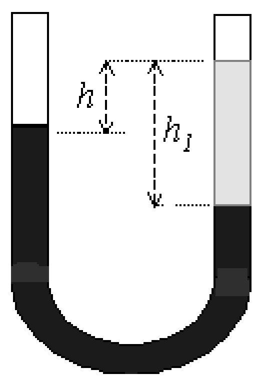

Figura 10.15

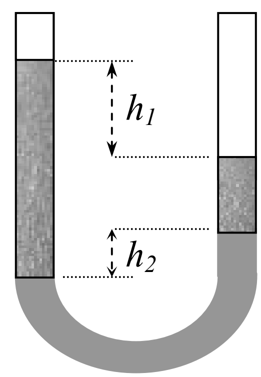

Figura 10.16

10.11 Demostrar que el 11% del volumen de un témpano de hielo sobresale de la superficie del mar.

10.12 Calcular la densidad de una boya de plástico de radio R, si flota en agua de mar, con $2/3$ de su volumen sobre el agua.

10.13 a) Calcular la altura sobre el nivel del agua de un cubo de madera de 10 cm de lado y densidad 650 kg/m^3 que flota en el agua. b) Calcular la cantidad de masa se debe poner sobre el cubo para que se hunda justo hasta el nivel de agua. R: a) 4 cm, b) 400 gr.

10.14 Una pelota esférica de plástico flota en el agua con 50% de su volumen sumergido. Esta misma pelota flota en aceite con 40% de su volumen sumergido. Determine las densidades del aceite y de la pelota. R: $\rho_{ac}=1250\ kg/m^3$, $\rho_{esf}=500\ kg/m^3$.

10.15 Heidi buscando bichos para Sanidad, encontró una rana y la puso en un tazón plástico semiesférico de radio *5 cm*, que luego hizo flotar en la laguna Los Patos, quedando el tazón flotando justo a ras del agua (figura 10.17). Suponga que el agua tiene una densidad de $1050\ kg/m^3$ y que la masa de la rana es *100 gr*, calcular la densidad del tazón. R: 667 kg/m^3.

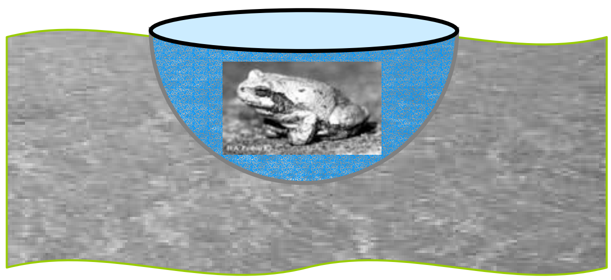

Figura 10.17.

10.16 Un bloque de metal de 10 kg de dimensiones *12cmx10cmx10cm,* se suspende de una balanza y se sumerge en agua. El lado de *12cm* está vertical y la parte superior del bloque sobresale *5 cm* de la superficie del agua. Calcular: a) la fuerza de tensión de la balanza, b) la fuerza de empuje sobre el bloque. R: a) 93 N, b) 7 N.

10.17 Calcular el área de una tabla de fibra de vidrio de espesor *H* y densidad ρ, cuando flota en el mar con un nadador de masa *M* sobre la tabla. R: $M/H(\rho_{ag} - \rho)$.

10.18 Calcular la fuerza para mantener completamente sumergida en agua de densidad ρ_a a una pelota de ping pong de radio *R* y densidad $\rho_a/12.5$. R: $3.85g\rho_a R^3$.

10.19 El estanque paralelepipoidal de la figura 10.18 se llena con agua hasta 2 m de profundidad. En la parte inferior de una pared del estanque hay una escotilla rectangular de 1 m de alto y 2 m de ancho, articulada en su parte superior. Calcular: a) la fuerza neta sobre la escotilla, b) el torque ejercido alrededor de las bisagras.

10.20 a) Demostrar que la fuerza resultante sobre una pared vertical de un estanque cúbico de ancho D lleno con agua de H m de profundidad es $\frac{1}{2}\rho g D H^2$. b) Demostrar que el torque total ejercido por el agua sobre la pared del estanque, en un eje que pasa por la base de la pared, es $(1/6)\rho g D H^3$ y que la línea de acción efectiva de la fuerza total ejercida por el agua está a una distancia de $1/3\ H$ sobre el eje.

10.21 Un mosquito que chocó con el estanque del problema 10.20, le hizo un agujero en un punto a 1.25 m debajo del nivel superior de agua, por el cual se ha medido un flujo de agua de 60 lt/min. Calcular: a) la rapidez de salida del agua, b) el radio del agujero. R: a) 5 m/s, b) 0.8 cm

10.22 El suministro de agua llega al nivel del suelo por una cañería de 5 cm de diámetro. Una llave de 2 cm de diámetro ubicada a 15m de altura llena un envase de 20lt en un minuto. Calcular: a) la rapidez con la que sale el agua de la llave, b) la presión en la cañería principal. R: a) 1m/s, b) $2.5p_o$.

10.23 Un estanque de agua tiene un pequeño agujero en su costado a una altura h debajo del nivel de agua, por donde sale agua con un flujo de Q *lt/min* (figura 10.19). Calcular: a) la rapidez con la que sale el agua por el agujero, b) el diámetro del agujero. R: a) $\sqrt{2gh}$, b) $2.2\text{x}10^{-3}\sqrt{Q/\sqrt{gh}}$.

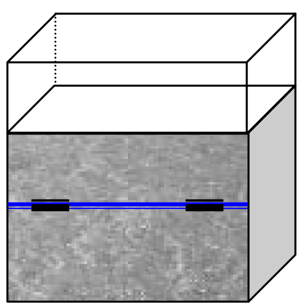

Figura 10.18.

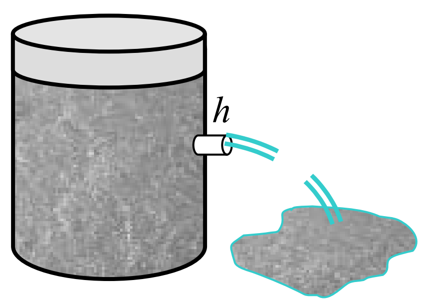

Figura 10.19.

10.24 En un estanque con agua de *2 m* de profundidad, se hace un agujero de *5 cm*^{2} a una altura h desde la superficie de agua (figura 10.19). Por la parte superior del estanque se le hecha agua con un flujo continuo de

1000 cm^3/s de manera que el nivel de agua permanece constante en *2 m*. Calcular a) la altura *h,* b) la rapidez de salida del agua. R: a) 0.2 m, b) 2 m/s.

10.25 Por una manguera de incendios de 6 cm de diámetro, fluye agua a razón de 600 lt/min. Calcular la rapidez de salida del agua de la manguera si el diámetro por donde sale es 2 cm.

10.26 Por una tubería horizontal fluye agua con una rapidez de 5 m/s. Si la presión es de $1.5 x 10^5$ Pa en un punto donde la sección transversal del tubo es A, determine en un punto donde el área es A/3: a) la rapidez y b) la presión de salida del agua. R: a) 15 m/s, b) $0.5 x 10^5$ Pa.

10.27 Un globo esférico de radio 0.4 m, inflado con helio se amarra a una cuerda uniforme de 2 m de largo y de ½ kg de masa. Calcular la altura de equilibrio que se eleva el globo después que se suelta. R: 1.9 m.

10.28 Un globo inflado con helio, de densidad $0.18\ kg/m^3$, se eleva hasta una altura de 8 km en la atmósfera cuya densidad disminuye con la altura en la forma $\rho_a = \rho_o e^{-z/8}$, donde z está en km y $\rho_o = 1.29\ kg/m^3$ en superficie. Calcular el volumen de helio con el que se debe inflar el globo para que pueda llevar una carga de 400 kg hasta los 8 km de altura, suponiendo que su volumen se mantiene constante. R: $1430\ m^3$.

10.29 Suponiendo la atmósfera y el océano homogéneos, esto es de densidad constante, calcular la presión en diferentes niveles de altura en la atmósfera hasta un km de altura y en el océano hasta 100 m de profundidad. Hacer el gráfico *p* versus *z.*

10.30 Determinar la variación de presión con la altura en la atmósfera sobre Concepción, considerando que la temperatura disminuye linealmente con la altura hasta el nivel de la tropopausa, en la forma $T = T_o - \Gamma z$, donde T_o es la temperatura en $z_o = 0$ y $\Gamma = 9.8\ ºC/km$, se llama gradiente adiabático seco de temperatura. Sugerencia: considerar la atmósfera formada por aire seco como un gas ideal.

R: $p(z) = p_o\left(1 - \frac{\Gamma z}{T_o}\right)^{g/\Gamma R_d}$, con R_d la constante específica del aire seco.