

Tarea 5 para Electrodinámica II

Fabián Andrés Torres Ruiz.

Departamento de Física
Universidad de Concepción, Chile

July 10, 2003

1 Problema

Conociendo la ecuación de ondas, rehacer el desarrollo general de la solución de *D'alambert*.

2 Solución

La ecuación de ondas es:

$$\nabla^2 f = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

Esta expresión se puede reescribir como:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) f = 0$$

Esta expresión se puede separar en el producto de dos operadores diferenciales, de modo que:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial r} \right) f = 0 \quad (1)$$

Por otro lado, si definimos las variable:

$$\begin{aligned} \xi &= t - \frac{r}{c} \\ \zeta &= t + \frac{r}{c} \\ \Rightarrow t &= \frac{1}{2}(\xi + \zeta) \\ \Rightarrow r &= \frac{c}{2}(\zeta - \xi) \end{aligned}$$

Ahora, buscamos las derivadas $\partial/\partial\xi$ y $\partial/\partial\zeta$, de modo que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} &= \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \xi} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{c}{2} \frac{\partial}{\partial r} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial r} \right) \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} &= \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \zeta} + \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \zeta} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{c}{2} \frac{\partial}{\partial r} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial r} \right) \end{aligned}$$

Ahora, podemos expresar estos dos resultados como:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \zeta} = \frac{1}{4} \left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial r} \right)$$

luego, la ecuación 1 la podemos expresar como:

$$4 \frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \zeta} = 0$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \zeta} = 0$$

Ahora, integrando se tiene que:

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} = F(\zeta)$$
$$f = F(\zeta) + G(\xi)$$
$$f = F\left(t + \frac{r}{c}\right) + G\left(t - \frac{r}{c}\right)$$

Que es la solución general de D'alambert para la ecuación de ondas.