Tarea 4 para Electrodinámica II

Fabián Andrés Torres Ruiz.
Departamento de Física
Universidad de Concepción, Chile

July 10, 2003

1 Problema

Encontrar la transformada de Fourier de la expresión:

$$\ddot{x}_i(t) = \left(i\omega_0 + \frac{\Gamma}{2}\right)^2 x_{0,i} \left[i(\omega_0 - \omega) + \frac{\Gamma}{2}\right]^{-1}$$

2 Solución

Para la emisión de radiación, al considerar un electron como fuente, se obtiene la ecuación diferencial:

$$\ddot{x}_i - \gamma \dddot{x}_i + \omega_0^2 x_i = 0$$

Donde:

$$\omega_0^2 = \frac{K}{m_e}$$
$$\gamma = \frac{2e^2}{3m_e c^3}$$

Para esta ecuación, obtenemos la solución como:

$$x_i(t) = x_{0,i} e^{-\left(\frac{\Gamma}{2} + i\omega_0\right)t}$$

Derivando dos veces esta expresión con respecto al tiempo se obtiene que:

$$\ddot{x}_i(t) = \left(i\omega_0 + \frac{\Gamma}{2}\right)^2 x_{0,i} e^{-\left(\frac{\Gamma}{2} + i\omega_0\right)t} \tag{1}$$

Ahora, la transformada de Fourier para una funcion $f(t)$ es:

$$\tilde{f}(\omega) = \int_0^\infty f(t) e^{i\omega t} dt$$

En nuestro caso, la expresión a resolver es:

$$\tilde{\ddot{x}}_i(\omega) = \int_0^\infty \ddot{x}_i(t) e^{i\omega t} dt \tag{2}$$

Reemplazando la ecuación 1 en 2 se tiene que:

$$\tilde{\ddot{x}}_i(\omega) = \int_0^\infty \left(i\omega_0 + \frac{\Gamma}{2}\right)^2 x_{0,i} e^{-\left(\frac{\Gamma}{2} + i(\omega_0 - \omega)\right)t} dt$$

Si definimos $\alpha = \frac{\Gamma}{2} + i\left(\omega_0 - \omega\right)$, entonces la expresion anterior queda como:

$$\begin{aligned} \tilde{\ddot{x}}_i(\omega) &= \int_0^\infty \left(i\omega_0 + \frac{\Gamma}{2}\right)^2 x_{0,i} e^{-\alpha t} dt \\ &= \left(i\omega_0 + \frac{\Gamma}{2}\right)^2 x_{0,i} \int_0^\infty e^{-\alpha t} dt \end{aligned}$$

Luego, evaluando la integral se tiene que:

$$\begin{aligned}
\ddot{\tilde{x}}_i(\omega) &= \left(i\omega_0 + \frac{\Gamma}{2}\right)^2 x_{0,i} \int_0^\infty e^{-\alpha t} dt \\
&= \left(i\omega_0 + \frac{\Gamma}{2}\right)^2 \frac{x_{0,i}}{-\alpha} \left[e^{-\alpha t}\right] |_0^\infty \\
&= \left(i\omega_0 + \frac{\Gamma}{2}\right)^2 \frac{x_{0,i}}{-\alpha} \left[e^{-\alpha\infty} - e^{-0}\right] \\
&= \left(i\omega_0 + \frac{\Gamma}{2}\right)^2 \frac{x_{0,i}}{\alpha} \\
&= \left(i\omega_0 + \frac{\Gamma}{2}\right)^2 \frac{x_{0,i}}{\frac{\Gamma}{2} + i\left(\omega_0 - \omega\right)}
\end{aligned}$$

Esta es la transformada de Fourier para la aceleración del electrón vibrando.