



Tarea 3 Para Física VI

Ondas

por

Fabián Andrés Torres Ruiz

Informe de Ondas

Departamento de Física

Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Universidad de Concepción
Av. Esteban Iturra s/n, Ciudad Universitaria
Casilla 160-C, Concepción,
CHILE

December 2002

Copyright © 2002.

Tarea 3 Para Física VI

Ondas

Fabián Andrés Torres Ruiz

Departamento de Física
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Universidad de Concepción

9 de diciembre de 2002

1. Problema

Estudiar el comportamiento de un oscilador armonico amortiguado forzado.

2. desarrollo

Para estudiar el comportamiento de este tipo de oscilador, partiremos por la ecuación que habíamos encontrado para el oscilador armónico amortiguado:

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = 0$$

A la cual le agregaremos un último término que corresponde a la fuerza externa, así se obtiene la nueva ecuación:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx - F(t) &= 0 \\ m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx &= F(t) \quad / \quad \cdot \frac{1}{m} \\ \ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x &= \frac{F(t)}{m} \end{aligned}$$

Así, si definimos $2\lambda = \frac{\alpha}{m}$, $\omega^2 = \frac{k}{m}$ y $f(t) = \frac{F(t)}{m}$ se obtiene la ecuación:

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega^2x = f(t)$$

Ahora, tenemos una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden no homogénea, por lo tanto la solución va a ser una combinación lineal de las soluciones de la ecuación homogénea más una solución particular. Si consideramos que la función $f(t)$ es una función periódica en el tiempo de la forma:

$$f(t) = g \cos(\gamma t)$$

entonces la ecuación a resolver es:

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega^2x = g \cos(\gamma t)$$

o por simplisidad, en forma compleja considerando solo la parte real se tiene:

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega^2 x = g \exp(i\gamma t) \quad (1)$$

Ahora, si suponemos una solucion de la forma $x = B \exp(i\gamma t)$ y remplazamos en la ecuación 1 se tiene que:

$$\begin{aligned} -B\gamma^2 \exp(i\gamma t) + 2\lambda i B \gamma \exp(i\gamma t) + \omega^2 B \exp(i\gamma t) &= g \exp(i\gamma t) \\ B(\omega^2 + 2\lambda i \gamma - \gamma^2) &= g \end{aligned}$$

$$B = \frac{g}{\omega^2 + 2\lambda i \gamma - \gamma^2} \quad (2)$$

Aqui, notamos claramente que B es complejo, de modo tal que se puede escribir como:

$$B = b \exp(i\delta)$$

luego llevan la ecuación 2 a la forma a+ib se tiene que:

$$\begin{aligned} B &= \frac{g}{\omega^2 - \gamma^2 + 2\lambda i \gamma} \cdot \frac{\omega^2 - \gamma^2 - 2\lambda i \gamma}{\omega^2 - \gamma^2 - 2\lambda i \gamma} \\ &= \frac{g(\omega^2 - \gamma^2 - 2\lambda i \gamma)}{(\omega^2 - \gamma^2)^2 + 4\lambda^2 \gamma^2} \\ &= \frac{g(\omega^2 - \gamma^2)}{(\omega^2 - \gamma^2)^2 + 4\lambda^2 \gamma^2} - i \frac{2g\lambda \gamma}{(\omega^2 - \gamma^2)^2 + 4\lambda^2 \gamma^2} \\ &= x + iy \end{aligned}$$

Llevando este resultado a la forma polar se tiene que:

$$\begin{aligned} b &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{g(\omega^2 - \gamma^2)}{(\omega^2 - \gamma^2)^2 + 4\lambda^2 \gamma^2} \right)^2 + \left(\frac{2g\lambda \gamma}{(\omega^2 - \gamma^2)^2 + 4\lambda^2 \gamma^2} \right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{g^2}{((\omega^2 - \gamma^2)^2 + 4\lambda^2 \gamma^2)^2} \{ (\omega^2 - \gamma^2)^2 + 4\lambda^2 \gamma^2 \}} \\ &= \sqrt{\frac{g^2}{(\omega^2 - \gamma^2)^2 + 4\lambda^2 \gamma^2}} \end{aligned}$$

y para el desfase δ se tiene que:

$$\begin{aligned} \tan \delta &= \frac{y}{x} \\ &= - \frac{2g\lambda \gamma}{(\omega^2 - \gamma^2)^2 + 4\lambda^2 \gamma^2} \frac{(\omega^2 - \gamma^2)^2 + 4\lambda^2 \gamma^2}{g(\omega^2 - \gamma^2)} \\ &= \frac{2\lambda \gamma}{(\gamma^2 - \omega^2)} \end{aligned}$$

Así, considerando la parte real de esta expresión obtenemos una solución particular para el caso de una fuerza periodica en el tiempo.

Las solución(para $\lambda > \omega$ y $\omega > \lambda$) completas de la ecuación son entonces:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= a \exp(-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega^2}) + b \cos(\omega t + \delta) \\ x_2(t) &= \exp(-\lambda t) \{a_1 \cos(\omega t) + a_2 \sen(\omega t)\} + b \cos(\omega t + \delta) \end{aligned}$$

Los gráficos 1 y 2 representan las soluciones de la ecuación diferencial para estos dos casos sin desfase ($\delta = 0$), mientras que las figuras 3 y 4 muestran las soluciones con desfase($\delta = 2$).

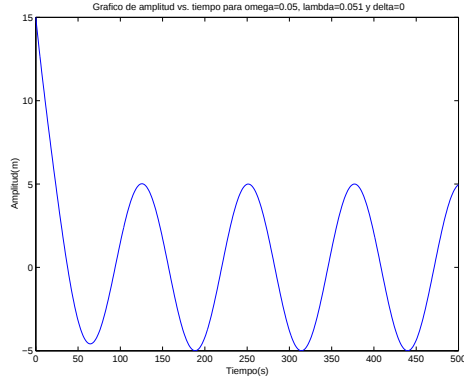


Figura 1: Gráfico de amplitud versus tiempo para el caso $\lambda > \omega$

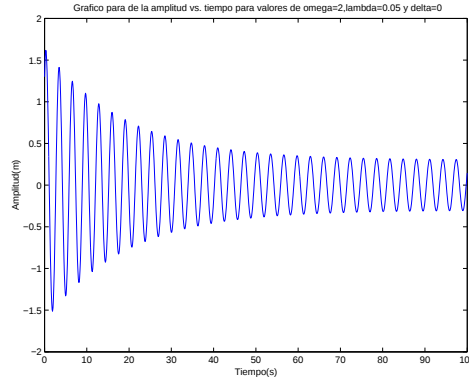


Figura 2: Gráfico de amplitud versus tiempo para el caso $\lambda < \omega$

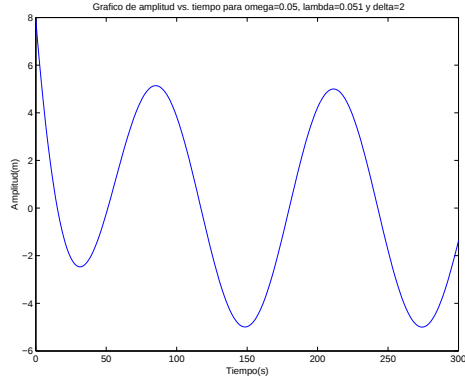


Figura 3: Gráfico de amplitud versus tiempo para el caso $\lambda > \omega$ con un desfase inicial $\delta = 2$

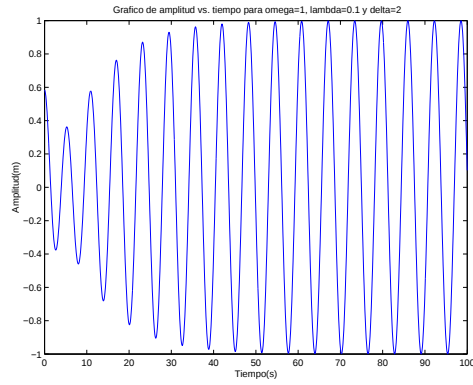


Figura 4: Gráfico de amplitud versus tiempo para el caso $\lambda < \omega$ con un desfase inicial $\delta = 2$

En el caso de resonancia, ($\omega = \lambda$) la amplitud no tiende a infinito, sino que tiene un valor máximo para el caso en que $\gamma = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2}$, es decir la fuerza impulsora externa tiene una frecuencia de la forma $\sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2}$.