



Tarea 2 Para Física VI Ondas

por

Fabián Andrés Torres Ruiz

Informe de Ondas

Departamento de Física

Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Universidad de Concepción
Av. Esteban Iturra s/n, Ciudad Universitaria
Casilla 160-C, Concepción,
CHILE

August 2002

Copyright © 2002.

Tarea 2 Para Física VI

Ondas

Fabián Andrés Torres Ruiz

Departamento de Física
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Universidad de Concepción

23 de agosto de 2002

1. Problema

- Reproducir la clase del día Miércoles 14 de Agosto.
- Hacer un análisis sobre los casos de movimiento armónico fuerte, débil y críticamente amortiguado en un medio viscoso.

2. Desarrollo

2.1. Oscilador armónico simple

Consideremos el caso unidimensional en el que tenemos un resorte de constante elástica k unido a un bloque con libertad de movimiento en el eje x . Como sabemos, la fuerza que ejerce el resorte es proporcional a su estiramiento, así podemos escribir:

$$F \propto \Delta x$$
$$F = -k\Delta x$$

el signo negativo se introdujo con la idea de que k es una constante positiva. Esto nos indica que la fuerza se opone al sentido del desplazamiento. Ahora, de acuerdo con la segunda ley de Newton se tiene que:

$$\sum_i F_i = m\vec{a}$$

En nuestro caso(unidireccional) se tiene que:

$$\sum_i F_i = m \frac{d^2 x}{dt^2}$$
$$m\ddot{x} = -kx$$

Si definimos $\omega^2 = \frac{k}{m}$, podemos escribir la ecuación como:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \tag{1}$$

La cual es una ecuación diferencial ordinaria. Ahora, si multiplicamos la ecuación 1 por $\dot{x}$ se tiene que:

$$\begin{aligned}\ddot{x} + \omega^2 x &= 0 & / & \cdot \dot{x} \\ \dot{x}\ddot{x} + \omega^2 \dot{x}x &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{x}\ddot{x} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{x}^2}{2}\right) \\ x\dot{x} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{x^2}{2}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\dot{x}^2 + \omega^2 x^2) &= 0 \\ \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \omega^2 x^2) &= c_1 & / & \cdot m \\ \frac{1}{2}(m\dot{x}^2 + kx^2) &= mc_1 \\ \frac{1}{2}(m\dot{x}^2 + kx^2) &= E\end{aligned}$$

En este caso $E = \text{constante}$, y su valor representa la energía mecánica del sistema.

Ahora, si suponemos una solución para $x(t)$ de la forma:

$$x(t) = A \exp(i\alpha t) + B \exp(-i\alpha t)$$

Entonces podemos derivar esta solución dos veces con respecto al tiempo, de este modo se tiene que:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(x) &= Ai\alpha \exp(i\alpha t) - Bi\alpha \exp(-i\alpha t) \\ \frac{d^2}{dt^2}(x) &= -A\alpha^2 \exp(i\alpha t) - B\alpha^2 \exp(-i\alpha t) \\ 0 &= \frac{d^2}{dt^2}(x) + A\alpha^2 \exp(i\alpha t) + B\alpha^2 \exp(-i\alpha t) \\ 0 &= \ddot{x} + \alpha^2(A \exp(i\alpha t) + B \exp(-i\alpha t)) \\ 0 &= \ddot{x} + \alpha^2(x)\end{aligned}$$

Así, con esta solución llegamos a la misma ecuación inicial, de este modo, la constante de la solución propuesta $\alpha^2 = \omega^2$. Como la ecuación es de segundo orden, las constantes de la solución son A y B .

2.2. Oscilador armónico amortiguado

En este caso, si suponemos que la fuerza viscosa es proporcional a la velocidad del cuerpo, entonces de acuerdo a la segunda ley de Newton se tiene que:

$$\begin{aligned} F_{elastica} + F_{viscosa} &= m\ddot{x} \\ -kx - \alpha\dot{x} &= m\ddot{x} \quad / \cdot \frac{1}{m} \\ \ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x &= 0 \end{aligned}$$

Ahora, si definimos $\frac{\alpha}{m} = 2\gamma$ y $\frac{k}{m} = \omega^2$ entonces se tiene que:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2x = 0 \quad (2)$$

Ahora, recurriendo a la ecuación característica podemos escribir el polinomio de grado 2:

$$r^2 + 2\gamma r + \omega^2 = 0$$

$$\begin{aligned} r_1 &= -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega^2} \\ r_2 &= -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega^2} \end{aligned}$$

Así, la solución para la ecuación diferencial 2 es:

$$x(t) = A \exp(-\gamma t + \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}t) + B \exp(-\gamma t - \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}t)$$

Ahora, con este resultado podemos analizar varios casos relacionados con los coeficientes γ y ω . De este modo se tienen los siguientes casos:

2.2.1. caso 1: $\gamma = 0$

En este caso volvemos al *oscilador armónico simple*. De tal manera que la amplitud de oscilación del cuerpo se mantiene constante. El gráfico representa la posición del cuerpo en función del tiempo y las líneas verdes son la cota para la amplitud de oscilación.

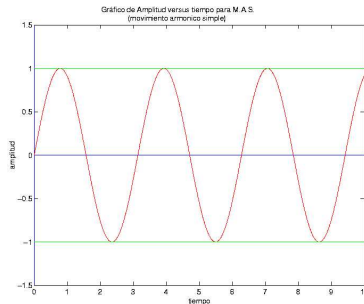


Figura 1: Gráfico del movimiento armónico simple para una amplitud inicial 1

2.2.2. caso 2: $\gamma = \omega$

En este caso, la ecuación diferencial 2 tiene por solución, de acuerdo con la teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\begin{aligned} r^2 + 2\omega r + \omega^2 &= 0 \\ (r + \omega)^2 &= 0 \end{aligned}$$

de aquí, la solución de r es una raíz repetida, así, la solución es:

$$\begin{aligned} x(t) &= A \exp(-\omega t) + Bt \exp(-\omega t) \\ &= \exp(-\omega t) \{A + Bt\} \end{aligned}$$

Esta solución satisface la ecuación 2. Para ver esto derivemosla en función del tiempo y reemplacemosla en 2:

$$0 = \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2 x$$

$$\begin{aligned} x(t) &= A \exp(-\omega t) + Bt \exp(-\omega t) \\ \dot{x} &= -A\omega + B \exp(-\omega t) - B\omega t \exp(-\omega t) \\ \ddot{x} &= A\omega^2 \exp(-\omega t) - 2B\omega \exp(-\omega t) + B\omega^2 t \exp(-\omega t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &A\omega^2 \exp(-\omega t) - 2B\omega \exp(-\omega t) + B\omega^2 t \exp(-\omega t) + \dots \\ &\dots + 2\omega \{-A\omega + B \exp(-\omega t) - B\omega t \exp(-\omega t)\} + \dots \\ &\dots + \omega^2 \{A \exp(-\omega t) + Bt \exp(-\omega t)\} = 0 \\ \{\omega^2 x - 2B\omega \exp(-\omega t)\} + 2\omega \{-\omega x + B \exp(-\omega t)\} + \omega^2 x &= 0 \\ \{\omega^2 x - 2B\omega \exp(-\omega t)\} - 2\omega^2 x + 2\omega B \exp(-\omega t) + \omega^2 x &= 0 \\ 2\omega^2 x - 2\omega^2 x - 2B\omega \exp(-\omega t) + 2B\omega \exp(-\omega t) &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

La figura 2 muestra algunas curvas teóricas para los siguientes casos:

- A y B iguales(Gráfico 1).
- A mucho mayor que B(Gráfico 2).
- A menor que B(Gráfico 3).
- A mucho menor que B(Gráfico 4).

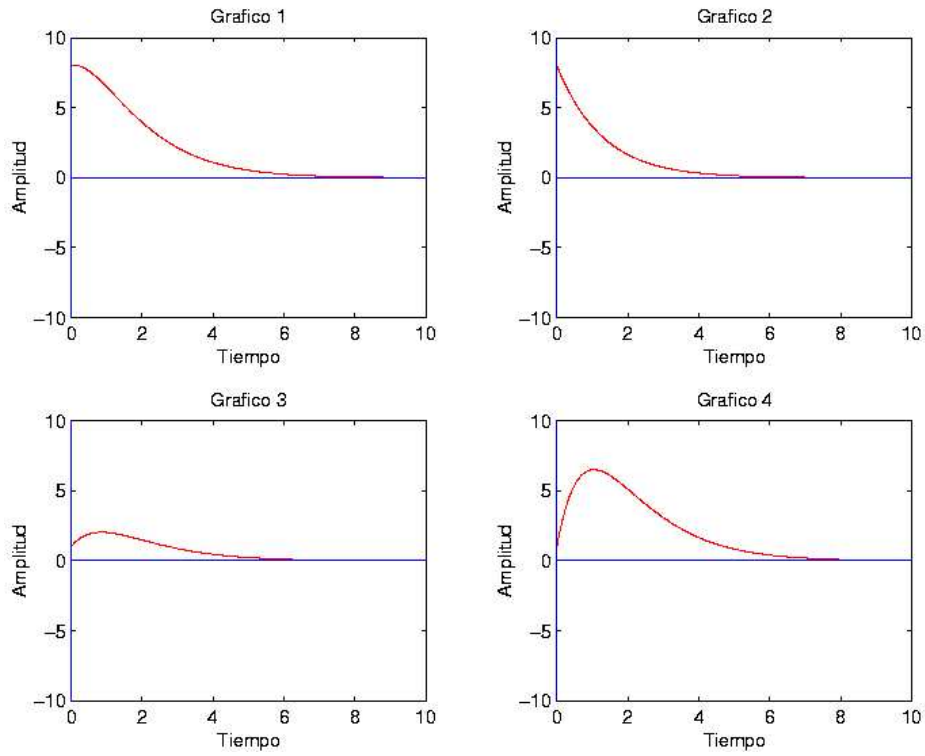


Figura 2: Gráficos de movimiento armónico críticamente amortiguado para varios valores de las constantes arbitrarias A y B.

Vemos que en cualquiera de los casos, las amplitudes del cuerpo dejan de ser oscilatorias.

2.2.3. caso 3: $\gamma < \omega$

Este es el caso donde el amortiguamiento es débil, la solución de la ecuación 2 consta de una exponencial decreciente por una función de tipo *cos* o *sin* la cual es periódica. Esta situación es mostrada en el siguiente gráfico:

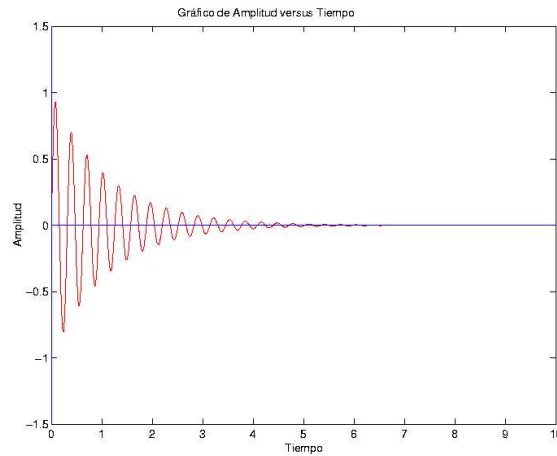


Figura 3: Gráfico del movimiento armónico amortiguado

2.2.4. caso 4: $\gamma > \omega$

En este caso, se produce una rápida caída de la amplitud, por lo que se dice que es un movimiento fuertemente amortiguado. Así el gráfico que se obtiene es:

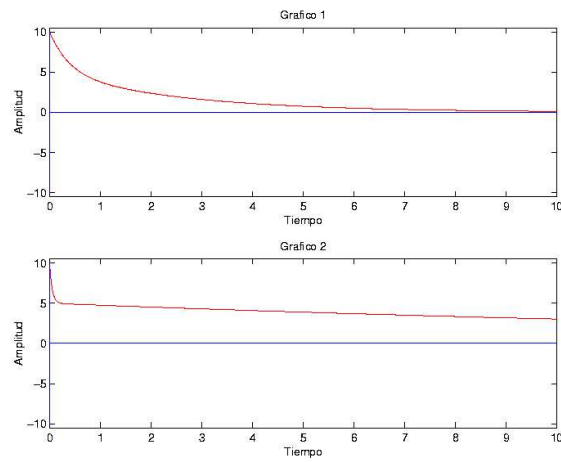


Figura 4: Gráfico del movimiento armónico fuertemente amortiguado

En este gráfico podemos ver que el movimiento deja de ser periódico y pasa a ser un movimiento acelerado a tal punto que el cuerpo finalmente queda en reposo.