



## Tarea 1 Para Física VI Ondas

por

Fabián Andrés Torres Ruiz

### Informe de Ondas

---

#### Departamento de Física

Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas  
Universidad de Concepción  
Av. Esteban Iturra s/n, Ciudad Universitaria  
Casilla 160-C, Concepción,  
CHILE

August 2002

Copyright © 2002.

# Tarea 1 Para Física VI

## Ondas

Fabián Andrés Torres Ruiz

Departamento de Física  
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas  
Universidad de Concepción

20 de agosto de 2002

### 1. Problemas

Encontrar para las siguientes funciones las expansiones en series de Fourier.

■

$$\begin{aligned} f(x) &= U_0; \quad 0 < x < T_0 \\ &= 0; \quad T_0 < x < 2T_0 \end{aligned}$$

■

$$g(x) = \frac{U_0 x}{T}; \quad 0 < x < T$$

### 2. Desarrollo

#### 2.1. Problema 1

Sabemos que una función periódica, la podemos escribir como una serie de Fourier, así se tiene que:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \exp\left(\frac{2\pi n i x}{T}\right)$$

Ahora, los coeficientes  $A_n$  los podemos determinar como:

$$A_n = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T f(x) \exp\left(-\frac{2\pi n i x}{T}\right) dx$$

Ahora, si consideramos que la función es de periodo  $T = 2T_0$ , resulta que para  $f(x)$  los coeficientes son:

$$A_n = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^{T_0} U_0 \exp\left(-\frac{2\pi nit}{T}\right) dt$$

Ahora, si hacemos el cambio de variable:

$$\begin{aligned} u &= -\frac{2\pi nit}{T} \\ du &= -\frac{2\pi ni}{T} dt \end{aligned}$$

Se obtiene que:

$$\begin{aligned} A_n &= -\frac{1}{\sqrt{T}} \frac{U_0 T}{2\pi in} \int_0^{\pi in} \exp(u) du \\ &= -\frac{U_0}{\pi in} \sqrt{\frac{T_0}{2}} \exp(u); \quad 0 < u < \pi ni \\ &= -\frac{U_0}{\pi in} \sqrt{\frac{T_0}{2}} (\exp(\pi ni) - \exp(0)) \\ &= -\frac{U_0}{\pi in} \sqrt{\frac{T_0}{2}} (\exp(\pi ni) - 1) \\ &= -\frac{U_0}{\pi in} \sqrt{\frac{T_0}{2}} \{\cos(n\pi) + i \operatorname{sen}(n\pi) - 1\} \\ &= -\frac{U_0}{\pi in} \sqrt{\frac{T_0}{2}} \{\cos(n\pi) - 1\} \end{aligned}$$

Ahora, si  $n$  es un numero par entonces  $\cos(n\pi) = 1$  y si  $n$  es un numero impar entonces  $\cos(n\pi) = -1$ , así se puede escribir:

$$A_n = -\frac{U_0}{\pi in} \sqrt{\frac{T_0}{2}} \{(-1)^n - 1\}$$

Así, para  $n$  par el coeficiente  $A_n$  se anula y para  $n$  impar, el resultado es:

$$\begin{aligned} A_n &= 2 \frac{U_0}{\pi in} \sqrt{\frac{T_0}{2}} \\ &= \frac{U_0}{\pi in} \sqrt{2T_0} \end{aligned}$$

Así, la expansión en serie de Fourier para  $f(t)$  queda como:

$$\begin{aligned}
f(t) &= \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \exp\left(\frac{2\pi nit}{T}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{U_0}{\pi in} \sqrt{2T_0} \exp\left(\frac{2\pi nit}{T}\right) \\
&= A_0 + \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{U_0}{\pi in} \sqrt{2T_0} \left\{ \exp\left(\frac{2\pi nit}{T}\right) - \exp\left(-\frac{2\pi nit}{T}\right) \right\} \\
&= A_0 + \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2U_0}{\pi n} \sqrt{2T_0} \left( \frac{\exp\left(\frac{2\pi nit}{T}\right) - \exp\left(-\frac{2\pi nit}{T}\right)}{2i} \right) \\
&= A_0 + \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2U_0}{\pi n} \sqrt{2T_0} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) \\
&= A_0 + \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2U_0}{\pi n} \sqrt{2T_0} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi nt}{T_0}\right) \\
&= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2U_0}{\pi n} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi nt}{T_0}\right)
\end{aligned}$$

El termino  $A_0$  lo podemos calcular como:

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$

Asi se tiene que:

$$\begin{aligned}
A_0 &= \frac{1}{T} \left\{ \int_0^{T_0} U_0 dt + \int_{T_0}^{2T_0} 0 dt \right\} \\
&= \frac{1}{2T_0} U_0 t \quad ; \quad 0 < t < T_0 \\
&= \frac{1}{2T_0} U_0 (T_0 - 0) \\
&= \frac{U_0}{2}
\end{aligned}$$

De este modo, la expresion para  $f(t)$  en forma de serie de Fourier es:

$$f(t) = \frac{U_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2U_0}{\pi n} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi nt}{T_0}\right)$$

Con este resultado podemos encontrar varios gráficos interesantes, por ejemplo podemos graficar cada uno de los términos que aparecen en la expresión (por ejemplo graficar los primeros 10 términos de la expansión sin sumarlos, que podrían compararse con los modos

normales de oscilación de una cuerda). Otro gráfico interesante sería ir viendo como paso a paso los términos se van sumando para converger a la función periódica. finalmente se puede obtener un gráfico con un numero elevado para  $n$  (el hecho de que no se grafiquen los términos para  $n = 1..\infty$  es debido a que los computadores funcionan en un dominio discreto y el valor de infinito es desconocido para una maquina, es decir infinito es un valor abstracto). Los gráficos que realizaremos incluyen la curva resultante de la expansión en serie. El gráfico 1 muestra cada termino independientemente del otro y la funcion resultante luego de 100 iteraciones. El gráfico 2 muestra como la serie se va aproximando a la función  $f(t)$ . Este grafico tiene la suma de tres terminos.

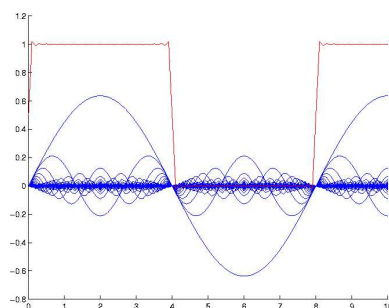


Figura 1: grafico 1 de  $f(t)$

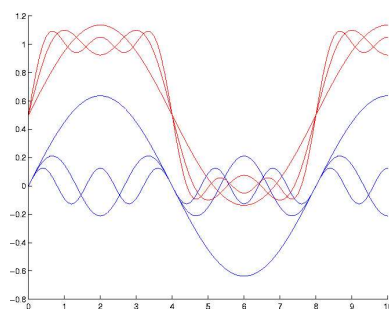


Figura 2: grafico 2 de  $f(t)$

## 2.2. Problema 2

En este caso, la función que estudiaremos es

$$g(t) = \frac{U_0 t}{T}; \quad 0 < t < T$$

Del mismo modo que en el caso anterior, los coeficientes  $A_n$  y  $A_0$  los determinamos como:

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \\ A_n &= \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T g(t) \exp\left(-\frac{2\pi n i t}{T}\right) dt \end{aligned}$$

De este modo, para la función  $g(t)$  los coeficientes son:

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{T} \int_0^T g(t) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{U_0 t}{T} dt \\ &= \frac{U_0}{T^2} \int_0^T t dt \\ &= \frac{U_0}{T^2} \frac{t^2}{2}; \quad 0 < t < T \\ &= \frac{U_0}{T^2} \left\{ \frac{T^2}{2} - 0 \right\} \\ &= \frac{U_0}{2} \\ A_n &= \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T \frac{U_0 t}{T} \exp\left(-\frac{2\pi n i t}{T}\right) dt \\ &= \frac{U_0}{T\sqrt{T}} \int_0^T t \exp\left(-\frac{2\pi n i t}{T}\right) dt \end{aligned}$$

Ahora, haciendo integración por partes tal que:

$$\begin{aligned} u &= t \\ du &= dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dv &= \exp\left(-\frac{2\pi n i t}{T}\right) \\ v &= -\frac{T}{2\pi i n} \exp\left(-\frac{2\pi n i t}{T}\right) \end{aligned}$$

Así se tiene que:

$$\begin{aligned}
\int_0^T t \exp(-\frac{2\pi i n t}{T}) &= -t \frac{T}{2\pi i n} \exp(-\frac{2\pi i n t}{T}) - \int_0^T \frac{T}{2\pi i n} \exp(-\frac{2\pi i n t}{T}) dt \\
&= -\frac{T^2}{2\pi i n} \exp(-2\pi i n) + (\frac{T}{2\pi i n})^2 \{\exp(-2\pi i n) - 1\} \\
&= -\frac{T^2}{2\pi i n} \exp(-2\pi i n) - (\frac{T}{2\pi n})^2 \{\{\cos(-2\pi n) - i \operatorname{sen}(-2\pi n)\} - 1\} \\
&= -\frac{T^2}{2\pi i n} \exp(-2\pi i n) - (\frac{T}{2\pi n})^2 \{\cos(-2\pi n) - 1\} \\
&= -\frac{T^2}{2\pi i n} \exp(-2\pi i n)
\end{aligned}$$

Ahora, reemplazando este valor para la integral se tiene que:

$$\begin{aligned}
A_n &= \frac{U_0}{T\sqrt{T}} \{-\frac{T^2}{2\pi i n} \exp(-2\pi i n)\} \\
&= -\frac{U_0}{T\sqrt{T}} \frac{T^2}{2\pi i n} \\
&= -\frac{U_0 T}{2\pi i n \sqrt{T}} \\
&= -\frac{U_0 \sqrt{T}}{2\pi i n}
\end{aligned}$$

En conclusión la serie de Fourier que representa a  $g(t)$  es:

$$\begin{aligned}
g(t) &= \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \exp(\frac{2\pi n i t}{T}) \\
&= -\frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{U_0 \sqrt{T}}{2\pi i n} \exp(\frac{2\pi n i t}{T}) \\
&= A_0 - \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{U_0 \sqrt{T}}{2\pi i n} \exp(\frac{2\pi n i t}{T}) - \frac{U_0 \sqrt{T}}{2\pi i n} \exp(-\frac{2\pi n i t}{T}) \right\} \\
&= \frac{U_0}{2} - \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{U_0 \sqrt{T}}{\pi n} \left\{ \frac{\exp(\frac{2\pi n i t}{T}) - \exp(-\frac{2\pi n i t}{T})}{2i} \right\} \\
&= \frac{U_0}{2} - \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{U_0 \sqrt{T}}{\pi n} \operatorname{sen}(\frac{2\pi n t}{T}) \\
&= \frac{U_0}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{U_0}{\pi n} \operatorname{sen}(\frac{2\pi n t}{T})
\end{aligned}$$

Con esta expresión, al igual que en el caso anterior, podemos graficar tanto la función como los términos que la forman, así los gráficos que se adjuntan son:

- El primero muestra cada termino independiente del anterior y además se muestra explícitamente la curva resultante.
- El segundo nos muestra como la suma de los términos se aproxima a la función deseada.

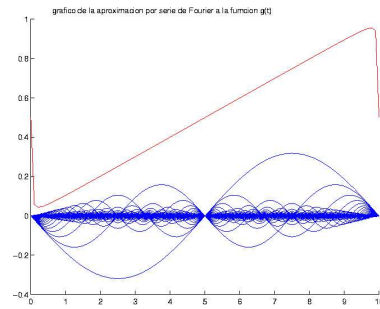


Figura 3: grafico 1 de  $g(t)$

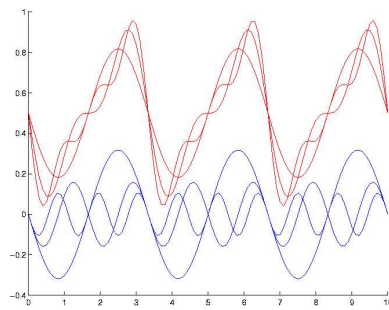


Figura 4: grafico 2 de  $g(t)$