Electrodinámica II

Tarea 1

Fabián Andrés Torres Ruiz*
(*)Departamento de Física, Universidad de Concepción, Chile

1 Problema

A partir de los potenciales de *Lienard-Wiechert* obtenga las siguientes expresiones para el campo eléctrico y magnético:

$$
\begin{aligned}
E_i &= q\frac{1-\frac{v^2}{c^2}}{\left(R-\frac{R_j v_j}{c}\right)^3}\left(R_i-\frac{v_i R}{c}\right)+\frac{q}{c^2\left(R-\frac{R_j v_j}{c}\right)^3}\left(\varepsilon_{ijk}R_j\varepsilon_{klm}\left[R_l-\frac{v_l}{c}R\right]a_m\right)\\
B_i &= \frac{1}{R}\varepsilon_{ijk}R_jE_k
\end{aligned}
$$

donde $a_i = \frac{\partial v_i}{\partial t'}$

2 Solucion

Los potenciales de *Lienard-Wiechert* son:

$$
A_i = \frac{qv_i}{c\left(R-\frac{R_j v_j}{c}\right)} \tag{1}
$$

$$
\phi = \frac{q}{\left(R-\frac{R_j v_j}{c}\right)} \tag{2}
$$

Donde A_i es el potencial vectorial y ϕ es el potencial escalar.
El campo eléctrico se puede escribir como:

$$E_i = -\frac{1}{c}\frac{\partial A_i}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \tag{3}$$

Por otra parte, el campo magnético se puede escribir como:

$$B_i = \varepsilon_{ijk} v_j A_k$$

2.1 Solución para el campo Eléctrico.

Utilizando la regla de la cadena, se puede escribir la ecuación (3) en función del tiempo t' como:

$$E_i = -\frac{1}{c}\frac{\partial A_i}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial x_i} - \frac{\partial \phi}{\partial R_j}\frac{\partial R_j}{\partial x_i}$$

Luego, hace falta determinar las funciones $\frac{\partial t'}{\partial t}$, $\frac{\partial t'}{\partial x_i}$ y $\frac{\partial R_j}{\partial x_i}$ para obtener la expresión del campo electrico.
La expresión $\frac{\partial t'}{\partial t}$ la podemos calcular tomando la derivada de R con respecto a t, esto es:

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \frac{\partial R}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t}$$

Considerando que $R = \sqrt{(x_i - x_i')^2}$ y que $v_i = \frac{\partial x_i'}{\partial t'}$se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t'}\sqrt{(x_j - x_j')^2}\frac{\partial t'}{\partial t} && (4)\\ &= -\frac{v_j\left(x_j - x_j'\right)}{\sqrt{(x_j - x_j')^2}}\frac{\partial t'}{\partial t} = -\frac{v_j R_j}{R}\frac{\partial t'}{\partial t} && (5) \end{aligned}$$

Si ahora consideramos a R como $R = c(t - t')$ se tiene que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial t} &= c\frac{\partial (t - t')}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t} && (6)\\ &= c\left(\frac{\partial t}{\partial t'} - 1\right)\frac{\partial t'}{\partial t} && (7)\\ &= c\left(1 - \frac{\partial t'}{\partial t}\right) && (8) \end{aligned}$$

Luego igualando las expresiones (5) y (8) se tiene que:

$$
\begin{aligned}
-\frac{v_j R_j}{R}\frac{\partial t'}{\partial t} &= c\left(1-\frac{\partial t'}{\partial t}\right) && (9)\\
\frac{\partial t'}{\partial t}\left(c-\frac{v_j R_j}{R}\right) &= c && (10)\\
\frac{\partial t'}{\partial t} &= \frac{1}{\left(1-\frac{v_j R_j}{cR}\right)} && (11)
\end{aligned}
$$

Ahora, para obtener la forma de la función $\frac{\partial t'}{\partial x_i}$ se puede seguir un procedimiento similar. Primero, consideremos a $R = c\,(t-t')$, asi se tiene que:

$$
\frac{\partial R}{\partial x_i} = -c\frac{\partial t'}{\partial x_i} \tag{12}
$$

Por otra parte, R tambien es $R = \sqrt{\left(x_i - x_i'\right)^2}$ de modo que:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial R}{\partial x_i} &= \frac{\partial}{\partial x_i}\sqrt{\left(x_i - x_i'\right)^2} && (13)\\
&= \frac{R_i}{R}\left(1-\frac{\partial x_i'}{\partial x_i}\right) && (14)\\
&= \frac{R_i}{R}\left(1-\frac{\partial x_i'}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial x_i}\right) && (15)\\
&= \frac{R_i}{R}\left(1-v_i\frac{\partial t'}{\partial x_i}\right) && (16)
\end{aligned}
$$

Luego igualando las expresiones 12 y 16 se tiene que

$$
\begin{aligned}
-c\frac{\partial t'}{\partial x_i} &= \frac{R_i}{R}\left(1-v_i\frac{\partial t'}{\partial x_i}\right)\\
\frac{\partial t'}{\partial x_i}\left(c-v_i\frac{R_i}{R}\right) &= -\frac{R_i}{R}\\
\frac{\partial t'}{\partial x_i} &= -\frac{R_i}{c\left(R-\frac{R_j v_j}{c}\right)}
\end{aligned}
$$

Para el otro termino, $\frac{\partial R_j}{\partial x_i}$ se tiene que:

$$\frac{\partial R_j}{\partial x_i} = \frac{\partial\left(x_j - x_j'\right)}{\partial x_i} \tag{17}$$
$$= \delta_{ij} \tag{18}$$

Por otro lado, el término $\frac{\partial\phi}{\partial R_j}\frac{\partial R_j}{\partial x_i}$ es:

$$\frac{\partial\phi}{\partial R_j} = q\frac{\partial\left(R - \frac{R_j v_j}{c}\right)^{-1}}{\partial R_j}\frac{\partial R_j}{\partial x_i} \tag{19}$$
$$= q\frac{\partial\left(R - \frac{R_j v_j}{c}\right)^{-1}}{\partial R_j}\delta_{ij} \tag{20}$$
$$= q\frac{\partial\left(R - \frac{R_j v_j}{c}\right)^{-1}}{\partial R_i} \tag{21}$$
$$= -\frac{q}{\left(R - \frac{R_j v_j}{c}\right)^2}\left(\frac{R_i}{R} - \frac{v_i}{c}\right) \tag{22}$$

De esta forma, ahora solo hace falta encontrar las derivadas de A_i y ϕ con respecto a t'. Para el potencial vectorial A_i, considerando que $\frac{\partial R}{\partial t'} = -\frac{v_i R_i}{R}$ y que $\frac{\partial R_i}{\partial t'} = -v_i$, se tiene que:

$$\frac{\partial A_i}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial t'}\left(\frac{q v_i}{c\left(R - \frac{R_j v_j}{c}\right)}\right) \tag{23}$$
$$= \frac{q}{c}\frac{1}{\left(R - \frac{R_j v_j}{c}\right)^2}\left[a_i\left(R - \frac{R_j v_j}{c}\right) - \left(\left[\frac{\partial R}{\partial t'} - \frac{1}{c}\frac{\partial(R_j v_j)}{\partial t'}\right] v_i\right)\right] \tag{24}$$
$$= \frac{q}{c\left(R - \frac{R_j v_j}{c}\right)^2}\left[a_i\left(R - \frac{R_j v_j}{c}\right) - \left(\left[-\frac{v_j R_j}{R} - \frac{1}{c}v_j\frac{\partial R_j}{\partial t'} - \frac{1}{c}R_j\frac{\partial v_j}{\partial t'}\right] v_i\right)\right] \tag{25}$$
$$= \frac{q}{c\left(R - \frac{R_j v_j}{c}\right)^2}\left[a_i\left(R - \frac{R_j v_j}{c}\right) - \left(\left[-\frac{v_j R_j}{R} + \frac{1}{c}v_j v_j - \frac{1}{c}R_j a_j\right] v_i\right)\right] \tag{26}$$
$$= \frac{q}{c\left(R - \frac{R_j v_j}{c}\right)^2}\left[a_i\left(R - \frac{R_j v_j}{c}\right) + \frac{v_i v_j R_j}{R} - \frac{1}{c}v_j v_j v_i + \frac{1}{c}R_j a_j v_i\right] \tag{27}$$
$$= \frac{q}{c\left(R - \frac{R_j v_j}{c}\right)^2}\left[a_i\left(R - \frac{R_j v_j}{c}\right) + \frac{v_i v_j R_j}{R} - \frac{1}{c}v_j^2 v_i + \frac{1}{c}R_j a_j v_i\right] \tag{28}$$

Ahora, la derivada del potencial escalar ϕ con respecto a t' la obtenemos como:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial t'}\left(\frac{q}{\left(R - \frac{R_j v_j}{c}\right)}\right) \tag{29}$$

$$= q\frac{\partial}{\partial t'}\left(\frac{1}{\left(R - \frac{R_j v_j}{c}\right)}\right) \tag{30}$$

$$= -\frac{q}{\left(R - \frac{R_j v_j}{c}\right)^2}\left[\frac{\partial R}{\partial t'} - \frac{v_j}{c}\frac{\partial R_j}{\partial t'} - \frac{R_j}{c}\frac{\partial v_j}{\partial t'}\right] \tag{31}$$

$$= -\frac{q}{\left(R - \frac{R_j v_j}{c}\right)^2}\left[-\frac{v_j R_j}{R} + \frac{v_j v_j}{c} - \frac{R_j a_j}{c}\right] \tag{32}$$

Luego, utilizando las ecuaciones (11), (17), (28), (22)y (32) y reemplazandolas en la ecuación (3) se obtiene que:

$$\begin{aligned}
E_i &= -\frac{1}{c}\frac{\partial A_i}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial x_i} - \frac{\partial \phi}{\partial R_j}\frac{\partial R_j}{\partial x_i} \\
&= -\frac{qR}{c^2\left(R - \frac{R_j v_j}{c}\right)^3}\left[a_i\left(R - \frac{R_j v_j}{c}\right) + \frac{v_i v_j R_j}{R} - \frac{1}{c}v_j^2 v_i + \frac{1}{c}R_j a_j v_i\right] - ... \\
... & -\frac{qR_i}{c\left(R - \frac{R_j v_j}{c}\right)^3}\left[-\frac{v_j R_j}{R} + \frac{v_j v_j}{c} - \frac{R_j a_j}{c}\right] + \frac{q}{\left(R - \frac{R_j v_j}{c}\right)^2}\left(\frac{R_i}{R} - \frac{v_i}{c}\right) \\
&= \frac{q}{c\left(R - \frac{R_j v_j}{c}\right)^3}\left[-a_i\frac{R_j R_j}{c} + a_i\frac{R R_j v_j}{c^2} - v_i v_j\frac{R_j}{c} + \frac{R v_j^2 v_i}{c^2} - \frac{R}{c^2}R_j a_j v_i + \frac{v_j R_j R_i}{R} - \frac{v_j^2 R_i}{c} + \frac{R_j a_j R_i}{c}\right] + ... \\
... & +\frac{q}{\left(R - \frac{R_j v_j}{c}\right)^2}\left(\frac{R_i}{R} - \frac{v_i}{c}\right)
\end{aligned}$$

Esta expresión para el campo eléctrico se puede factorizar. Para esto, los terminos (1), (2), (5) y (8) se pueden agrupar como:

$$-a_i\frac{R_j R_j}{c} + a_i\frac{R R_j v_j}{c^2} - \frac{R}{c^2}R_j a_j v_i + \frac{R_j a_j R_i}{c} = a_i R_j\left(\frac{R}{c^2}v_j - \frac{R_j}{c}\right) - a_j R_j\left(\frac{R}{c^2}v_i - \frac{R_i}{c}\right)$$

Si definimos un vector $W_j = \frac{R}{c^2}v_j - \frac{R_j}{c}$, entonces esta expresión se reescribe como:

$$\begin{aligned}
-a_i\frac{R_jR_j}{c} + a_i\frac{RR_jv_j}{c^2} - \frac{R}{c^2}R_ja_jv_i + \frac{R_ja_jR_i}{c} &= R_j\left(a_iW_j - a_jW_i\right) && (33)\\
&= R_j\left(\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}\right)a_lW_m && (34)\\
&= R_j\varepsilon_{kij}\varepsilon_{klm}a_lW_m && (35)\\
&= \varepsilon_{ijk}R_j\varepsilon_{klm}a_lW_m && (36)\\
&= -\varepsilon_{ijk}R_j\varepsilon_{klm}W_la_m && (37)
\end{aligned}$$

Reemplazando el valor de W entonces se tiene que:

$$-\varepsilon_{ijk}R_j\varepsilon_{klm}W_la_m = \frac{1}{c}\varepsilon_{ijk}R_j\varepsilon_{klm}\left(R_l - \frac{R}{c}v_l\right)a_m$$

Ahora, la expresión para el campo electrico se puede escribir como:

$$\begin{aligned}
E_i &= \frac{q}{c\left(R - \frac{R_jv_j}{c}\right)^3}\left[-v_iv_j\frac{R_j}{c} + \frac{R}{c^2}v_j^2v_i + \frac{v_jR_jR_i}{R} - \frac{v_jv_jR_i}{c}\right] + ...\\
&\quad ... + \frac{q}{c^2\left(R - \frac{R_jv_j}{c}\right)^3}\varepsilon_{ijk}R_j\varepsilon_{klm}\left(R_l - \frac{R}{c}v_l\right)a_m + \frac{q}{\left(R - \frac{R_jv_j}{c}\right)^2}\left(\frac{R_i}{R} - \frac{v_i}{c}\right)
\end{aligned}$$

Ahora, los primeros cuatro términos de la expresión anterior se pueden escribir como:

$$\begin{aligned}
-v_iv_j\frac{R_j}{c} + \frac{R}{c^2}v_j^2v_i + \frac{v_jR_jR_i}{R} - \frac{v_jv_jR_i}{c} &= \frac{v_iR}{c}\left(-\frac{v_jR_j}{R} + \frac{v_jv_j}{c}\right) + R_i\left(\frac{v_jR_j}{R} - \frac{v_jv_j}{c}\right)\\
&= \left(R_i - \frac{v_iR}{c}\right)\left(\frac{v_jR_j}{R} - \frac{v_jv_j}{c}\right)
\end{aligned}$$

Luego, el campo eléctrico queda como:

$$\begin{aligned}
E_i &= \frac{q}{c\left(R - \frac{R_jv_j}{c}\right)^3}\left(R_i - \frac{v_iR}{c}\right)\left(\frac{v_jR_j}{R} - \frac{v_jv_j}{c}\right) + \frac{q}{c^2\left(R - \frac{R_jv_j}{c}\right)^3}\varepsilon_{ijk}R_j\varepsilon_{klm}\left(R_l - \frac{R}{c}v_l\right)a_m + ...\\
&\quad ... + \frac{q}{\left(R - \frac{R_jv_j}{c}\right)^2}\left(\frac{R_i}{R} - \frac{v_i}{c}\right)
\end{aligned}$$

Ahora, el primer grupo de terminos se puede agrupar con el ultimo, de modo que:

$$\begin{aligned}
& \frac{q}{c\left(R-\frac{R_j v_j}{c}\right)^3}\left(R_i-\frac{v_i R}{c}\right)\left(\frac{v_j R_j}{R}-\frac{v_j v_j}{c}\right)+\frac{q}{\left(R-\frac{R_j v_j}{c}\right)^2}\left(\frac{R_i}{R}-\frac{v_i}{c}\right) \\
= & \frac{q}{c\left(R-\frac{R_j v_j}{c}\right)^3}\left[\left(R_i-\frac{v_i R}{c}\right)\left(\frac{v_j R_j}{R}-\frac{v_j v_j}{c}\right)+c\left(R-\frac{R_j v_j}{c}\right)\left(\frac{R_i}{R}-\frac{v_i}{c}\right)\right] \\
= & \frac{q}{c\left(R-\frac{R_j v_j}{c}\right)^3}\left[\left(R_i-\frac{v_i R}{c}\right)\left(\frac{v_j R_j}{R}-\frac{v_j v_j}{c}\right)+\frac{c}{R}\left(R-\frac{R_j v_j}{c}\right)\left(R_i-\frac{v_i R}{c}\right)\right] \\
= & \frac{q}{c\left(R-\frac{R_j v_j}{c}\right)^3}\left(R_i-\frac{v_i R}{c}\right)\left[\left(\frac{v_j R_j}{R}-\frac{v_j v_j}{c}\right)+\frac{c}{R}\left(R-\frac{R_j v_j}{c}\right)\right] \\
= & \frac{q}{c\left(R-\frac{R_j v_j}{c}\right)^3}\left(R_i-\frac{v_i R}{c}\right)\left[\frac{v_j R_j}{R}-\frac{v_j v_j}{c}+c-\frac{R_j v_j}{R}\right] \\
= & \frac{q}{c\left(R-\frac{R_j v_j}{c}\right)^3}\left(R_i-\frac{v_i R}{c}\right)\left(c-\frac{v_j v_j}{c}\right) \\
= & \frac{q}{\left(R-\frac{R_j v_j}{c}\right)^3}\left(R_i-\frac{v_i R}{c}\right)\left(1-\frac{v_j^2}{c^2}\right)
\end{aligned}$$

Así finalmente, la expresión para el campo eléctrico es:

$$E_i = q\frac{\left(1-\frac{v_j^2}{c^2}\right)}{\left(R-\frac{R_j v_j}{c}\right)^3}\left(R_i-\frac{v_i R}{c}\right)+\frac{q}{c^2\left(R-\frac{R_j v_j}{c}\right)^3}\varepsilon_{ijk}R_j\varepsilon_{klm}\left(R_l-\frac{R}{c}v_l\right)a_m$$