

Seminario 13: Circuitos en serie y en paralelo.

Fabián Andrés Torres Ruiz*

* Departamento de Física, Universidad de Concepción, Chile

06 de Junio de 2007.

Problemas

1. (Problema 67, capítulo 26, Física, Raymond A. Serway, V2, cuarta edición)
Cuando dos capacitores se conectan en paralelo, la capacitancia equivalente es de $4\mu F$. Si los mismos capacitores se reconectan en serie, la capacitancia equivalente es un cuarto de la capacitancia de uno de los capacitadores. Determine las dos capacitancias.
2. (Problema 1, capítulo 28, Física, Raymond A. Serway, V2, cuarta edición)
Una batería con una fem de $12V$ y una resistencia interna de 0.9Ω se conecta en los extremos de un resistor de carga R . a) Si la corriente en el circuito es $1.4A$ ¿Cuál es el valor de R ? b) ¿Qué potencia se disipa en la resistencia interna de la batería?
3. (Problema 4, capítulo 28, Física, Raymond A. Serway, V2, cuarta edición)
Si la fem de una batería es $15V$ y se mide una corriente de $60A$ cuando la batería está en corto, ¿Cuál es la resistencia interna de la batería?
4. (Problema 14, capítulo 28, Física, Raymond A. Serway, V2, cuarta edición)
a) Encuentre la resistencia equivalente entre los puntos a y b en la figura 1. b) Si una diferencia de potencial de $34V$ se aplica entre los puntos a y b , calcule la corriente en cada resistor

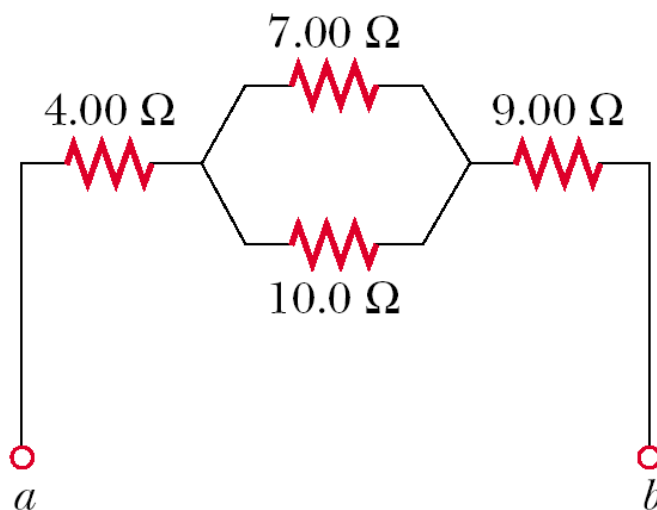


Figura 1: Circuito mixto de resistencias.

Soluciones

Problema 1

En este caso, como las capacitancias son desconocidas, podemos designar los capacitadores como C_1 y C_2 , de donde podemos obtener que, cuando están conectados en paralelo su capacitancia equivalente es

$$\begin{aligned} C_{par} &= C_1 + C_2 \\ C_1 &= 4 \times 10^{-6} - C_2 \end{aligned}$$

Ahora, en la configuración en serie, se sabe que la capacitancia equivalente es un cuarto de la capacitancia de uno de ellos, vamos a suponer que del condensador 2. Entonces se tiene que

$$\frac{1}{C_{ser}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \quad (1)$$

$$\frac{4}{C_2} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \quad (2)$$

Si reemplazamos el resultado de la ecuación 1 en la ecuación 2 se tiene que

$$\frac{4}{C_2} = \frac{1}{C_{par} - C_2} + \frac{1}{C_2} \quad (3)$$

$$\frac{4}{C_2} - \frac{1}{C_2} = \frac{1}{C_{par} - C_2} \quad (4)$$

$$\frac{3}{C_2} = \frac{1}{C_{par} - C_2} \quad (5)$$

$$3(C_{par} - C_2) = C_2 \quad (6)$$

$$3C_{par} = C_2 + 3C_2 \quad (7)$$

$$C_2 = \frac{3}{4}C_{par} \quad (8)$$

Reemplazando el valor numérico se tiene que

$$\begin{aligned} C_2 &= \frac{3}{4}4 \times 10^{-6} \\ &= 3 \times 10^{-6} \end{aligned}$$

Reemplazando este resultado en la ecuación 1 se tiene que

$$\begin{aligned} C_1 &= 4 \times 10^{-6} - C_2 \\ &= 4 \times 10^{-6} - 3 \times 10^{-6} = 1 \mu F \end{aligned}$$

De esta forma, se obtienen las dos capacitancias de los condensadores.

Problema 2

En este caso, como conocemos el valor de la resistencia interna de la batería R_{int} , la fem ε y la corriente I en el circuito, podemos entonces calcular la resistencia externa considerando que, junto con la resistencia interna

forman un circuito en serie, de modo que la resistencia equivalente es

$$R_{eq} = R_{int} + R \Rightarrow R = R_{eq} - R_{int} \quad (9)$$

Utilizando esta resistencia interna, podemos ahora utilizar la ley de Ohm, con la que se tiene que

$$V = IR \Rightarrow R_{eq} = \frac{\varepsilon}{I} = \frac{12}{1.4} = 8.57 \Omega$$

Utilizando este resultado en la ecuación 9 se tiene que

$$R = R_{eq} - R_{int} \Rightarrow R = 8.57 - 0.9 = 7.67 \Omega$$

De esta forma, ya sabemos el valor de la resistencia externa del sistema.

Para calcular la potencia disipada por la batería, tenemos varios caminos equivalentes, por ejemplo, como conocemos el valor de la corriente y de la resistencia interna de la batería, y el circuito está conectado en serie (es decir la corriente para la batería es la misma que para la resistencia externa), podemos calcular la potencia como

$$\left. \begin{aligned} P &= IV \\ V &= IR \end{aligned} \right\} \Rightarrow P_{int} = R_{int}I^2 = 0.9 \times (1.4)^2 = 1.76 W$$

Una forma indirecta de calcular la potencia es calcular la potencia entregada por la fuente

$$P_F = I\varepsilon = 1.4 \times 12 = 16.8 W$$

y calcular la potencia disipada por la resistencia externa

$$P_{D1} = I^2 R = 7.67 \times 1.4^2 = 15.03 W$$

La potencia que no es disipada por la resistencia exterior corresponde a la disipada por la fuente, de modo que se tendría entonces que $P_{int} = P_F - P_{D1} = 16.8 - 15.03 = 1.767 W$ de donde se obtiene el mismo resultado anterior.

Problema 3

En este caso, como no existe resistencia externa, la única resistencia que existe es la de la fuente, por lo que, utilizando la ley de Ohm, se tiene que

$$V = IR \Rightarrow R_{int} = \frac{\varepsilon}{I} = \frac{15}{60} = 0.25 \Omega$$

es decir, la resistencia interna es de 0.25Ω .

Problema 4

Al observar el circuito, notamos que las dos resistencias

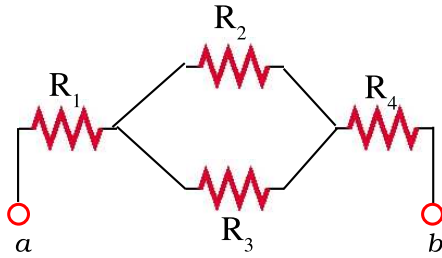


Figura 2: Circuito de resistencias

centrales R_2 y R_3 (ver figura 2) están conectadas en paralelo, por lo que el valor de la resistencia equivalente de estas dos, R_{eq1} está dado por

$$\begin{aligned}\frac{1}{R_{eq1}} &= \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \\ &= \frac{1}{7} + \frac{1}{10} \\ &= \frac{17}{70} \Rightarrow R_{eq1} = \frac{70}{17} = 4.12\Omega\end{aligned}$$

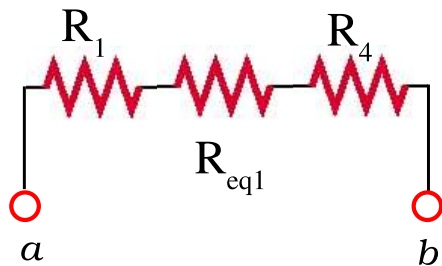


Figura 3: Circuito de resistencias reducido

Ahora, el circuito a sido reducido al mostrado en la figura 3 en donde claramente, las resistencias aparecen conectadas en serie, por lo que la resistencia equivalente es

$$\begin{aligned}R_{eq2} &= R_1 + R_{eq1} + R_4 \\ &= 4 + 4.12 + 9 = 17.12\Omega\end{aligned}$$

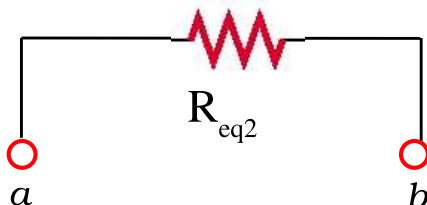


Figura 4: Circuito de resistencias reducido

Así, el circuito lo podemos reducir al mostrado en la figura 4 donde la resistencia equivalente del sistema es $R_{eq2} = 17.12\Omega$

Si ahora aplicamos una diferencia de potencial de $34V$ entonces podremos calcular la corriente total que circula por el circuito, de modo que se tiene que

$$I = \frac{V}{R} = \frac{34}{17.12} = 1.99A$$

Ahora, como ya sabemos la corriente que pasa por el circuito, podemos calcular los voltajes para cada resistencia del circuito de la figura 3, para esto, sabemos que la corriente que pasa por cada resistencia es la misma, por lo tanto

$$\begin{aligned}V &= IR \Rightarrow V_1 = IR_1 = 1.99 \times 4 = 7.96V \\ V_{eq1} &= IR_{eq1} = 1.99 \times 4.12 = 8.2V \\ V_4 &= IR_4 = 1.99 \times 9 = 17.91V\end{aligned}$$

Si sumamos estos resultados, obtenemos nuevamente los $34V$ de la fuente, lo que nos indica que el resultado es correcto.

Ahora, nos falta determinar las corrientes que pasan por las resistencias R_2 y R_3 , de modo que, como están conectadas en paralelo, están sometidas al mismo potencial, de donde se tiene entonces que

$$\begin{aligned}I &= \frac{V}{R} \Rightarrow I_2 = \frac{V_{eq1}}{R_2} = \frac{8.2}{7} = 1.17A \\ I_3 &= \frac{V_{eq1}}{R_3} = \frac{8.2}{10} = 0.82A\end{aligned}$$

De esta forma, si sumamos estos dos resultados, reobtenemos el valor de la corriente al interior del sistema.

el resumen de resultados se muestra en la tabla 1

Cuadro 1: Resumen de los cálculos

Resistencia	Voltaje	Corriente
$R_1 = 4\Omega$	$V_1 = 7.96V$	$I_1 = 1.99A$
$R_2 = 7\Omega$	$V_2 = 8.2V$	$I_2 = 1.17A$
$R_3 = 10\Omega$	$V_3 = 8.2V$	$I_3 = 0.82A$
$R_4 = 9\Omega$	$V_4 = 17.91V$	$I_4 = 1.99A$

Apéndice

Cuadro 2: Formulas para Fuerza eléctrica.

Ley de Coulomb (escalar)	$ F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{ r ^2}$	F : Magnitud de la fuerza q_i : Carga i ϵ_0 : Permitividad del vacío r : Distancia entre las cargas
Ley de Coulomb (Vectorial)	$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{ \vec{x}_1 - \vec{x}_2 ^3} (\vec{x}_1 - \vec{x}_2)$	$\vec{F}$: Vector de fuerza eléctrica ϵ_0 : Permitividad del vacío q_i : Carga i $\vec{x}_i$: Vector de posición de la carga i
Campo eléctrico	$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$	$\vec{F}$: Fuerza electrostática q_0 : carga puntual de prueba en el punto donde se quiere medir el campo eléctrico
Campo eléctrico de una carga puntual	$\vec{E}_q = k \frac{q\vec{r}}{ \vec{r} ^3}$	$\vec{F}$: Fuerza electrostática q_0 : carga puntual de prueba en el punto donde se quiere medir el campo eléctrico
Capacitancia	$C = \frac{Q}{V}$	C : Capacitancia de un condensador Q : Carga dentro del condensador V : Diferencia de potencial en las placas del condensador
Condensador de placas paralelas	$C = \kappa \frac{\epsilon_0 A}{d}$	κ : Constante dieléctrica (1 para el vacío) ϵ_0 : Permitividad del vacío A : Área del condensador d : Separación de las placas
Condensadores en paralelo	$C_{eq} = \sum_{i=1}^n C_i = C_1 + C_2 + \dots + C_n$	C_{eq} : Capacitancia equivalente C_i : capacitancia individual.
Condensadores en serie	$\frac{1}{C_{eq}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}$	C_{eq} : Capacitancia equivalente C_i : capacitancia individual.
Densidades de carga lineal, superficial y volumétrica	$\lambda = \frac{Q}{L}, \quad \sigma = \frac{Q}{A} \quad \rho = \frac{Q}{V}$	λ : Densidad de carga lineal σ : Densidad de carga superficial ρ : Densidad de carga volumétrica Q : Carga total L : Largo A : Área V : volumen
Ley de Ohm	$V = IR$	V : Diferencia de potencial I : Corriente eléctrica R : Resistencia eléctrica
Resistencia equivalente (Conexión en Serie)	$R_{eq} = \sum_{i=1}^n R_i = R_1 + R_2 + \dots + R_n$	R_{eq} : Resistencia equivalente R_i : Resistencias individuales
Resistencia equivalente (Conexión en paralelo)	$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}$	R_{eq} : Resistencia equivalente R_i : Resistencias individuales