# Seminario 12: Condensadores.

Fabián Andrés Torres Ruiz*
* Departamento de Física, Universidad de Concepción, Chile

30 de Mayo de 2007.

## Problemas

1. (Desarrollo)
   Deducción del tiempo de descarga de un condensador

2. (Problema 10, capitulo 26, Física, Raymond A. Serway, V2, cuarta edición)
   Un capacitador de placas paralelas lleno de aire va a tener una capacitancia de $1F$. Si la distancia entre las placas es de $1mm$, calcule el área de la superficie requerida de cada placa.

3. (Problema 13, capitulo 26, Física, Raymond A. Serway, V2, cuarta edición)
   Cuando se aplica una diferencia de potencial de $150V$ a las placas de un capacitador de placas paralelas, las placas tienen una densidad de carga superficial de $30nC/cm^2$¿Cuál es el espaciamiento entre las placas?

4. (Problema 15, capitulo 26, Física, Raymond A. Serway, V2, cuarta edición)
   Un capacitor lleno de aire está compuesto de dos placas paralelas, cada una con un área de $7.6cm^2$, separadas por una distancia de $1.8mm$. Si se aplica una diferencia de potencial de $20V$ a estas placas, calcule a) el campo eléctrico entre las mismas, b) la densidad de carga superficial, c) la capacitancia, y d) la carga sobre cada placa.

5. (Problema 29, capitulo 26, Física, Raymond A. Serway, V2, cuarta edición)
   a) Determine la capacitancia equivalente para la red de capacitores que se muestra en la figura 1. b) Si la red se conecta a una batería de $12V$, calcule la diferencia de potencial a través de cada capacitor y la carga en cada capacitor.

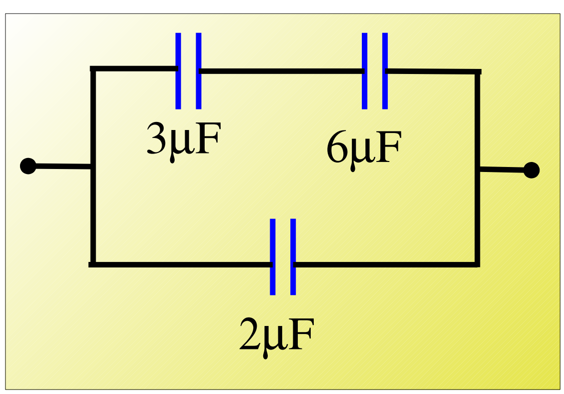


Figura 1: Circuito de condensadores

# Soluciones

**Deducción pregunta 1**
De la definición de capacitancia de un condensador sabemos que

$$C = \frac{Q}{V} \Rightarrow V = \frac{Q}{C}.$$

La ley de Ohm dice que la corriente de un sistema es proporcional al voltaje e inversamente proporcional a la resistencia eléctrica de los materiales, de modo que

$$I = \frac{V}{R}$$

La corriente eléctrica corresponde a la cantidad de carga por unidad de tiempo que circula en un circuito, esto se puede escribir como

$$I = -\frac{dQ}{dt} \tag{1}$$

Consideremos lo siguiente, si conectamos un condensador cargado con carga $Q(t=0) = Q_0$ a una resistencia de valor $R$, entonces el condensador se descargara lentamente provocando una corriente en la resistencia.

En este proceso, tanto la resistencia como el condensador están a la misma diferencia de potencial, ya que sus terminales están conectados entre si.

De esta forma se puede escribir que

$$\begin{aligned} V_c &= V_R \\ \frac{Q}{C} &= -IR \end{aligned}$$

De acá podemos escribir (considerando la definición de corriente 1) que

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dt} &= -\frac{Q}{RC} \\ \frac{dQ}{Q} &= -\frac{1}{RC}dt \\ \int_{Q_0}^{Q_t} \frac{dQ}{Q} &= -\int_{t_0}^{t} \frac{1}{RC}dt \end{aligned}$$

la integral de la izquierda corresponde a la función logaritmo natural, mientras que los términos de la integral de la derecha son constantes, luego se tiene que

$$\begin{aligned} Ln\,(Q)|_{Q_0}^{Q_t} &= -\frac{1}{RC}(t-t_0) \\ Ln\,(Q_t) - Ln\,(Q_0) &= -\frac{1}{RC}(t-t_0) \\ Ln\left(\frac{Q_t}{Q_0}\right) &= -\frac{1}{RC}(t-t_0) \\ \frac{Q_t}{Q_0} &= e^{-\frac{(t-t_0)}{RC}} \\ Q_t &= Q_0 e^{-\frac{(t-t_0)}{RC}} \end{aligned}$$

De esta forma se obtiene la expresión de como cambia la carga en función del tiempo. SI tomamos la derivada con respecto al tiempo se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dt} = -I &= \frac{d}{dt}Q_0 e^{-\frac{(t-t_0)}{RC}} \\ -I(t) &= -\frac{Q_0}{RC}e^{-\frac{(t-t_0)}{RC}} \\ I &= \frac{V}{R}e^{-\frac{(t-t_0)}{RC}} \\ &= Ie^{-\frac{(t-t_0)}{RC}} \end{aligned}$$

Así, vemos que el condensador se descarga exponencialmente en el tiempo. Esto también es valido para la carga de este mismo.

**Problema 2**
En este caso, podemos utilizar la ecuación para la capacitancia de un condensador de placas paralelas, es decir

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

de modo que si la capacitancia es de $1F$, entonces se tiene que

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{\epsilon_0 A}{1 \times 10^{-3}} \\ A &= \frac{1 \times 10^{-3}}{\epsilon_0} \\ A &= \frac{1 \times 10^{-3}}{8.8542 \times 10^{-12}} \\ &= 112.9 \times 10^6 m^2 \end{aligned}$$

Es decir se necesitaría un cuadrado de $10.6km$ de lado para una capacitancia de $1F$.

**Problema 3**
En este caso, la diferencia de potencial es de $150V$. La densidad de carga superficial corresponde al cuociente entre la carga y el área, por lo que se tiene que

$$\sigma = \frac{Q}{A} = 30 \times 10^{-9}$$

De esta forma, la carga almacenada es

$$Q = 30 \times 10^{-9} A$$

La capacitancia es

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

luego quedándonos con la última igualdad se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{Q}{V} &= \frac{\epsilon_0 A}{d} \\ \frac{30 \times 10^{-9} A}{150} &= \frac{\epsilon_0 A}{d} \\ d &= \frac{150\epsilon_0}{30 \times 10^{-9}} = 4.43cm \end{aligned}$$

la separación de las placas es de $4.43cm$.

**Problema 4**

Para un sistema de placas paralelas, la dependencia de la diferencia de potencial es lineal con el campo y a la distancia, es decir,

$$V = Er$$

En este caso, como el campo es perpendicular a las placas, la distancia que debemos utilizar corresponde a la separación de las placas, así se tiene que

$$E = \frac{V}{r} = \frac{20}{1.8 \times 10^{-3}} = 11.1 \times 10^3 \frac{N}{C}$$

La expresión 2 es válida solo para campos eléctricos homogéneos y constantes.

Ahora, la densidad de carga superficial será

$$\sigma = \frac{Q}{A} \tag{2}$$

Como vemos, necesitamos determinar la carga eléctrica en cada placa para resolver el problema. Para esto, podemos utilizar la definición de capacitancia para un condensador de placas paralelas de donde se obtiene que

$$C = \epsilon_0 \frac{A}{d} = 8.8542 \times 10^{-12} \frac{7.6(\times 10^{-2})^2}{1.8 \times 10^{-3}} = 3.74 \times 10^{-12}$$

Con esto, podemos ahora utilizar la definición de capacitancia general $C = \frac{Q}{V}$ de donde se obtiene que

$$Q = CV = 3.74 \times 10^{-12} \times 20 = 7.48 \times 10^{-11} C$$

De donde finalmente obtenemos que la densidad de carga superficial 2 es

$$\sigma = \frac{Q}{A} = \frac{7.48 \times 10^{-11}}{7.6(\times 10^{-2})^2} = 9.84 \times 10^{-8} \frac{C}{m^2}$$

Con esto se obtienen todos los resultados necesarios.

**Problema 5**

Los circuitos de condensadores se pueden clasificar en dos tipos, serie y paralelo (existen conexiones híbridas entre estos pero son de una complejidad mayor)

Para el caso de condensadores en paralelo, se puede obtener un condensador equivalente de modo que

$$C_{eq} = \sum_{i=1}^{n} C_i = C_1 + C_2 + ... + C_n$$

y para una red de condensadores en serie se tiene que el condensador equivalente se puede escribir como

$$\frac{1}{C_{eq}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + ... + \frac{1}{C_n}$$

Ahora, si nos vamos al circuito, vemos que los dos condensadores superiores 2 están en serie (uno de los lados del condensador se conecta al lado del otro condensador), por lo que la capacitancia equivalente será

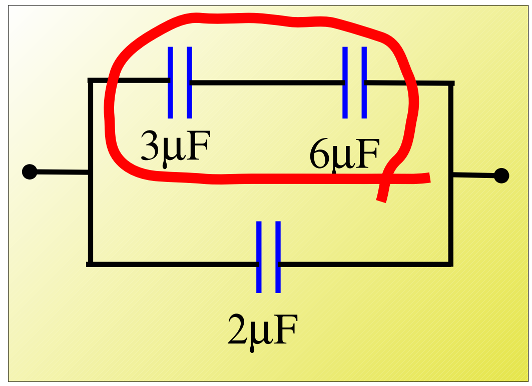


Figura 2: Sección en serie del circuito considerado.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{C_{eq1}} &= \frac{1}{3 \times 10^{-6}} + \frac{1}{6 \times 10^{-6}} \\
&= \frac{2}{6 \times 10^{-6}} + \frac{1}{6 \times 10^{-6}} \\
&= \frac{3}{6 \times 10^{-6}} \\
&= \frac{1}{2 \times 10^{-6}} \\
C_{eq1} &= 2 \times 10^{-6} F = 2\mu F
\end{aligned}$$

De esta forma, el circuito equivalente se muestra en la

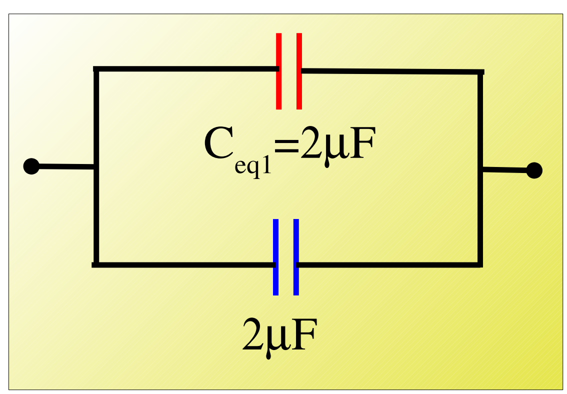


Figura 3: Circuito reducido.

figura 3, donde se tienen solo dos condensadores conectados en paralelo (en paralelo ya que cada terminal de los condensadores está directamente conectado a los terminales de la fuente) Con esto, la capacitancia equivalente será

$$\begin{aligned} C_{eq2} &= C_{eq1} + 2\mu F \\ &= 2 \times 10^{-6} + 2 \times 10^{-6} = 4 \times 10^{-6} = 4\mu F \end{aligned}$$

Es decir, la capacitancia equivalente del circuito es de $4\mu F$.

Ahora, como conocemos la capacitancia equivalente del sistema, y aplicamos un voltaje de $12V$, podemos calcular la cantidad de carga almacenada por el circuito

$$Q_{total} = CV = 4 \times 10^{-6} \times 12 = 48 \times 10^{-6}C$$

Si ahora nos rearmamos el circuito como en la figura 3, entonces, como la conexión es en paralelo, se conserva el voltaje, además ambas capacitancias son iguales por lo que almacenan la misma carga, por lo que cada una conserva la mitad de la carga total, de donde se tiene que

$$Q_{2\mu F} = 12 \times 2 \times 10^{-6} = 24 \times 10^{-6}C$$

y

$$Q_{C_{eq1}} = 12 \times 2 \times 10^{-6} = 24 \times 10^{-6}C$$

Ahora, ya determinamos la carga, la capacitancia y el voltaje para el condensador inferior, de modo que solo nos faltan los mismo items para los condensadores superiores (los de la figura 2).

En serie, lo que se conserva es la carga (ambos condensadores en serie poseen la misma carga almacenada, independiente de sus capacitancias), por lo tanto, la carga almacenada en el condensador equivalente 1 es la carga de los dos condensadores componentes, de modo que

$$Q_{C_{eq1}} = 24 \times 10^{-6}C = Q$$
$$Q = 24 \times 10^{-6}C = 24\mu C$$

Esta carga es la que tiene cada condensador, de modo que los voltajes para cada uno son

$$V_{3\mu F} = \frac{Q}{C} = \frac{24 \times 10^{-6}}{3 \times 10^{-6}} = 8V$$

y para el otro condensador se tiene

$$V_{6\mu F} = \frac{Q}{C} = \frac{24 \times 10^{-6}}{6 \times 10^{-6}} = 4V$$

Vemos que realmente la suma de los voltajes nos entrega el valor de la fuente lo que nos ratifica el resultado. En resumen se tiene que

| Capacitancia ($\mu F$) | Carga ($\mu C$) | Voltaje ($V$) |
|---|---|---|
| 6 | 24 | 4 |
| 3 | 24 | 8 |
| 2 | 24 | 12 |

# Apéndice

Cuadro 1: Formulas para Fuerza eléctrica.

| | | |
|---|---|---|
| Ley de Coulomb (escalar) | $\|F\| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{\|r\|^2}$ | $F$: Magnitud de la fuerza<br>$q_i$: Carga $i$<br>$\epsilon_0$:Permitividad del vacío<br>$r$: Distancia entre las cargas |
| Ley de Coulomb (Vectorial) | $\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{\|\vec{x}_1 - \vec{x}_2\|^3}(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)$ | $\vec{F}$: Vector de fuerza eléctrica<br>$\epsilon_0$:Permitividad del vacío<br>$q_i$: Carga $i$<br>$\vec{x}_i$: Vector de posición de la carga $i$ |
| Campo eléctrico | $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$ | $\vec{F}$: Fuerza electrostática<br>$q_0$: carga puntual de prueba en el punto donde se quiere medir el campo eléctrico |
| Campo eléctrico de una carga puntual | $\vec{E}_q = k\frac{q\vec{r}}{\|\vec{r}\|^3}$ | $\vec{F}$: Fuerza electrostática<br>$q_0$: carga puntual de prueba en el punto donde se quiere medir el campo eléctrico |
| Capacitancia | $C = \frac{Q}{v}$ | $C$: Capacitancia de un condensador<br>$Q$: Carga dentro del condensador<br>$V$: Diferencia de potencial en las placas del condensador |
| Condensador de placas paralelas | $C = \kappa\frac{\epsilon_0 A}{d}$ | $\kappa$: Constante dieléctrica (1 para el vacio) $\epsilon_0$: Permitividad del vacío<br>$A$: Área del condensador<br>$d$: Separación de las placas |
| Condensadores en paralelo | $C_{eq} = \sum_{i=1}^{n} C_i = C_1 + C_2 + ... + C_n$ | $C_{eq}$: Capacitancia equivalente<br>$C_i$: capacitancia individual. |
| Condensadores en serie | $\frac{1}{C_{eq}} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{C_i} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + ... + \frac{1}{C_n}$ | $C_{eq}$: Capacitancia equivalente<br>$C_i$: capacitancia individual. |
| Densidades de carga lineal, superficial y volumetrica | $\lambda = \frac{Q}{L}, \quad \sigma = \frac{Q}{A} \quad \rho = \frac{Q}{\mathcal{V}}$ | $\lambda$: Densidad de carga lineal<br>$\sigma$: Densidad de carga superficial<br>$\rho$: Densidad de carga volumetrica<br>$Q$: Carga total<br>$L$: Largo<br>$A$: Área<br>$\mathcal{V}$: volumen |