Seminario 11: Movimiento de partículas cargadas.

Fabián Andrés Torres Ruiz*
* Departamento de Física, Universidad de Concepción, Chile

23 de Mayo de 2007.

Problemas

1. (Problema 45, capitulo 23, Física, Raymond A. Serway, V2, cuarta edición)
   Un protón acelera desde el reposo en un campo eléctrico de $640 N/C$. Cierto tiempo después su velocidad es $1.2 \times 10^6 m/s$ (no relativista puesto que v es mucho menor que la velocidad de la luz). a)Encuentre la aceleración del protón. b) ¿Cuánto tarda el protón en alcanzar su velocidad? c) ¿Qué distancia a recorrido en ese tiempo? d) ¿Cuál es su energía cinética en este tiempo?

2. (Problema 51, capitulo 23, Física, Raymond A. Serway, V2, cuarta edición)
   Un protón se mueve a $4.5 \times 10^5 m/s$ en la dirección horizontal. Entra a un campo eléctrico uniforme de $9.6 \times 10^3 N/C$ dirigido verticalmente hacia abajo. Ignore todos los efectos gravitacionales y encuentre a) el tiempo que tarda el protón en viajar $5 cm$ horizontalmente, b) su desplazamiento vertical después de que ha recorrido $5 cm$ horizonralmente, y c) las componentes horizontal y vertical de su velocidad despues de que ha recorrido los $5 cm$ en la dirección horizontal.

Soluciones

Problema 1

En este tipo de problemas, debemos tener en mente tanto los conceptos de mecánica (velocidad, fuerza, energía, trayectoria, etc) y los conceptos de campo eléctrico y fuerza eléctrica.

Como nos piden calcular primero la aceleración del protón, debemos tener en cuenta las siguientes relaciones de la mecánica.

$$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \tag{1}$$

$$v = v_0 + at \tag{2}$$

$$a = \frac{\Delta V}{\Delta t} \tag{3}$$

donde x es la posición, x_0 es la posición inicial, v es la velocida Además ebemos mezclar nuestros conocimientos de mecánica y electricidad, de donde podemos obtener que la fuerza que actua sobre un cuerpo es igual a su masa por su aceleración, y en el caso de cuerpos cargados eléctricamente, la fuerza que actua sobre ellos es igual a la carga por el campo eléctrco en el que estan sumergidos, es decir se tiene que

$$F = ma \qquad \text{y} \qquad F = qE$$

En la ecuación de la derecha conocemos todos los elementos, ya que la carga de un protón es conocida ($q_p = 1.6 \times 10^{-19}C$) y la masa del protón tambien es conocida ($m_p = 1.67 \times 10^{-27}kg$). En la ecuación de la izquierda, solo nos fata conocer la aceleración, de modo que igualando las dos expresiones (ya que las fuerzas son iguales) se tiene que

$$\begin{aligned} ma = qE \Rightarrow a = \frac{qE}{m} &= \frac{1.6 \times 10^{-19} \times 640}{1.67 \times 10^{-27}} \\ &= 6.13 \times 10^{10} \frac{m}{s^2} \end{aligned}$$

de esta forma tenémos que la aceleración tiene una magnitud de $a = 6.13 \times 10^{10} \frac{m}{s^2}$ y está dirigida en la dirección del campo eléctrico (ya que la carga es positiva).

Como ya conocemos la aceleración, entonces podemos utilizar la ecuación 2 para obtener el tiempo que demora en alcanzar la velocidad final. Para esto debemos recordar que parte del reposo por lo que $v_0 = 0$, luego se tiene que

$$v = v_0 + at \Rightarrow t = \frac{v}{a} = \frac{1.2 \times 10^6}{6.13 \times 10^{10}} = 1.96 \times 10^{-5}s$$

Ahora, como ya conocemos la velocidad, el tiempo y la aceleración, podemos calcular el desplazamiento de la partícula en ese tiempo, de modo que la distancia que ha recorrido en el tiempo calculado es, según la ecuación 1,

$$\begin{aligned} x - x_0 &= v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \\ \Delta x &= \frac{1}{2}6.13 \times 10^{10} \times \left(1.96 \times 10^{-5}\right)^2 \\ \Delta x &= 11.77m \end{aligned}$$

es decir el protón ha recorrido mas de 10 metros en esa fracción de segundo.

La energía cinética del cuerpo, corresponde a la ecuación

$$\begin{aligned} E_c &= \frac{1}{2}mv^2 \\ &= 0.5 \times 1.67 \times 10^{-27} \times \left(1.2 \times 10^6\right)^2 \\ &= 1.2 \times 10^{-15}J \end{aligned}$$

Así se obtienen todos los parámetros buscados.

Problema 2

Como ya dijimos, debemos conocer tanto las cantidades mecánicas como las eléctricas. En este caso la aceleración producida por el cámpo eléctrico será en la dirección del ele y. Como la particula posee originalmente velocidad en el eje horizontal y no existe ninguna fuerza actuando en este eje, entonces la velocidad de la partícula no se alterará en este eje, de modo que su velocidad inicial en el eje x es constante para cualquier tiempo, mientras que la velocidad vertical, cambiara producto de la aceleración del campo eléctrico, variando de $v_0 = 0$ a una velocidad final $v_f = v$.

Para calcular el tiempo que la partícula se demora en recorrer los $5cm$ horizontales, se tiene que

$$v = \frac{d}{t} \Rightarrow t = \frac{d}{v} = \frac{0.05}{4.5 \times 10^5} = 1.1 \times 10^{-7}s$$

Como ya conocemos el tiempo que tarda en recorrer los 5cm horizontales, podemos caclular el desplazamiento de la partícula en el eje vertical, para esto consideramos que su velocidad inicial en este eje es cero y que su posición inicial en y tambien es cero, de modo que

$$\begin{aligned} y &= y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}at^2 && (4) \\ &= \frac{1}{2}a\left(1.1 \times 10^{-7}\right)^2 && (5) \end{aligned}$$

Para calcular la aceleración, utilizamos el mismo procedimiento del ejercicio anterior, de modo de igualar las dos expresiones para la fuerza, se tiene entonces que

$$\begin{aligned} ma = qE \Rightarrow a = \frac{qE}{m} &= \frac{1.6 \times 10^{-19} \times 9.6 \times 10^3}{1.67 \times 10^{-27}} \\ &= 9.2 \times 10^{11}\frac{m}{s^2} \end{aligned}$$

Reemplazando ahora este resultado en la ecuación 5 se tiene que

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}a\left(1.1 \times 10^{-7}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}9.2 \times 10^{11} \times \left(1.1 \times 10^{-7}\right)^2 \\ &= 5.57 \times 10^{-3}m \end{aligned}$$

es decir, en el eje vertical se desplaza un poco mas de medio milímetro.

Para responder la última pregunta debemos calcular la velocidad final en el eje y, ya que esta nos dara la componente faltante de la velocidad. Para esto se tiene que

$$\begin{aligned} v_y &= v_{0y} + a_y t \\ &= 9.2 \times 10^{11} \times 1.1 \times 10^{-7} \\ &= 101200\frac{m}{s} = 101.2\frac{km}{s} \end{aligned}$$

Así, la velocidad final de la particula se puede escribir como $\vec{v} = \left(450\hat{i} + 101.2\hat{j}\right) \times 10^3 m/s$.

Apéndice

Cuadro 1: Formulas para Fuerza eléctrica.

Ley de Coulomb (escalar)	$\|F\| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{\|r\|^2}$	F: Magnitud de la fuerza q_i: Carga i ϵ_0:Permitividad del vacío r: Distancia entre las cargas
Ley de Coulomb (Vectorial)	$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{\|\vec{x}_1 - \vec{x}_2\|^3}(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)$	$\vec{F}$: Vector de fuerza eléctrica ϵ_0:Permitividad del vacío q_i: Carga i $\vec{x}_i$: Vector de posición de la carga i
Campo eléctrico	$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$	$\vec{F}$: Fuerza electrostática q_0: carga puntual de prueba en el punto donde se quiere medir el campo eléctrico
Campo eléctrico de una carga puntual	$\vec{E}_q = k\frac{q\vec{r}}{\|\vec{r}\|^3}$	$\vec{F}$: Fuerza electrostática q_0: carga puntual de prueba en el punto donde se quiere medir el campo eléctrico