Seminario 10: Campo eléctrico y potencial eléctrico.

Fabián Andrés Torres Ruiz*
* Departamento de Física, Universidad de Concepción, Chile

17 de Mayo de 2007.

Problemas

1. (Problema 27, capitulo 25, Física, Raymond A. Serway, V2, cuarta edición)
   Considere un número infinito de cargas idénticas (cada una con carga q), colocadas a lo largo del eje xa distancias $a,\ 2b,\ 3a,\ 4a, ...$ del origen (siempre en el sentido positivo del eje x).¿Cuál es el campo eléctrico en el origen debido a esta distribución?

   Ayuda: La serie

$$\sum_{n=i}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ...$$

   converge al valor $\frac{\pi^2}{6}$.

2. (Problema 55, capitulo 23, Física, Raymond A. Serway, V2, cuarta edición)
   Una bola de corcho cargada de 1 gramo de masa está suspendida en una cuerda ligera en presencia de un campo eléctrico uniforme, como en la figura 1. Cuando $\vec{E} = (3\vec{i} + 5\vec{j}) \times 10^5 N/C$, la bola está en equilibrio a $\theta = 37^o$. Encuentre a) la carga en la bola para mantener en equilibrio el sistema y b) la tensión en la cuerda.

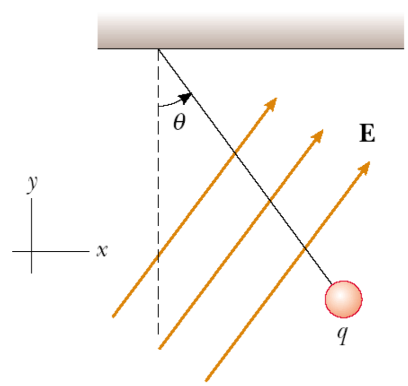

Figura 1: Carga colgada en un campo eléctrico externo.

Soluciones

Problema 1
En este caso, nos piden determinar le campo eléctrico en el origen, por lo que, usando lo forma no vectorial para el campo eléctrico, se tiene que, el campo producido por cada carga será de la forma

$$E = \frac{kq}{d^2}$$

donde q es la carga (igual para todos los puntos), y d es la distancia desde la posición de la carga hasta el origen.

En este caso, también es valido el principio de superposición, por lo que el campo total en el origen será la suma de los campos individuales producidos por las cargas distribuidas sobre el el eje x. De esta forma, la expresión para el campo total es

$$\begin{aligned} \vec{E} &= E_1 + E_2 + E_3 + E_4 + ... \\ &= \left(\frac{kq}{a^2} + \frac{kq}{(2a)^2} + \frac{kq}{(3a)^2} + \frac{kq}{(4a)^2} + ...\right)\vec{i} \\ &= \frac{kq}{a^2}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + ...\right)\vec{i} \end{aligned}$$

Utilizando la ayuda de la serie, se tiene entonces que

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{kq}{a^2}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + ...\right)\vec{i} \\ &= \frac{kq}{a^2}\frac{\pi^2}{6}\vec{i} \end{aligned}$$

de modo que la expresión para el campo es finalmente $\vec{E} = \frac{\pi^2 kq}{6a^2}\vec{i}$

Problema 2
Como se ve en la figura 2, hay presentes 3 fuerzas, la

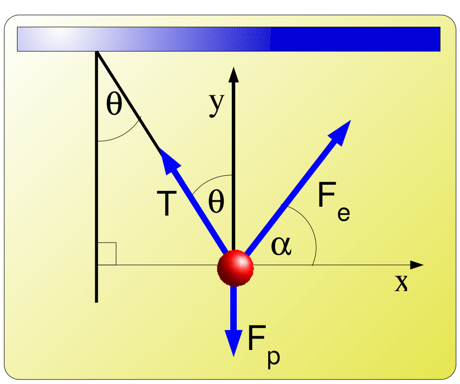

Figura 2: Esfera equilibrada con el peso y la fuerza eléctrica

tensión de la cuerda $\vec{T}$, la fuerza gravitacional o fuerza peso $\vec{F}_p$, y la fuerza eléctrica $\vec{F}_e$, producida por la presencia del campo. Para que la esfera se mantenga en equilibrio, la fuerza neta que actúa sobre ella debe ser 0, para esto entonces debemos descomponer las fuerzas en componentes y luego sumarlas vectorialmente e igualar cada eje a cero. Entonces se tiene que, para el caso estacionario, las fuerzas se escriben como

$$\begin{aligned} \vec{T} &= -T\sin\theta\vec{i} + T\cos\theta\vec{j} \\ F_p &= -mg\vec{j} \\ F_e &= q(E_x\vec{i} + E_y\vec{j}) = q(3\vec{i} + 5\vec{j}) \times 10^5 \end{aligned}$$

Resolviendo ahora por componente se tiene que

$$\begin{aligned} \sum F_x &= qE_x - T\sin\theta = 0 \\ \sum F_y &= T\cos\theta - mg + qE_y = 0 \end{aligned}$$

De la expresión 1 podemos despejar la tensión como

$$T = \frac{qE_x}{\sin\theta}$$

Reemplazando esto en 1 se tiene que

$$\begin{aligned} T\cos\theta - mg + qE_y &= 0 \\ \frac{qE_x}{\sin\theta}\cos\theta - mg + qE_y &= 0 \\ q(E_x\mathsf{cotan}\theta + E_y) &= mg \\ q &= \frac{mg}{(E_x\mathsf{cotan}\theta + E_y)} \\ &= \frac{9.8\times10^{-3}}{(3\times10^5\mathsf{cotan}37 + 5\times10^5)} \\ &= \frac{9.8\times10^{-3}}{(1.33\times3\times10^5 + 5\times10^5)} \\ &= \frac{9.8\times10^{-3}}{89.9\times10^4} = 1.09\times10^{-8}C \end{aligned}$$

Ahora, como ya conocemos el valor de la carga, podemos calcular el valor de la tensión utilizando la ecuación 1, se tiene que

$$\begin{aligned} qE_x - T\sin\theta &= 0 \\ T &= \frac{qE_x}{\sin\theta} \\ &= \frac{1.09\times10^{-8}\times3\times10^5}{0.602} \\ &= 5.43\times10^{-3} \end{aligned}$$

Apéndice

Cuadro 1: Formulas para Fuerza eléctrica.

Ley de Coulomb (escalar)	$\lvert F\rvert = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{\lvert r\rvert^2}$	F: Magnitud de la fuerza q_i: Carga i ϵ_0:Permitividad del vacío r: Distancia entre las cargas
Ley de Coulomb (Vectorial)	$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{\lvert\vec{x}_1-\vec{x}_2\rvert^3}(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)$	$\vec{F}$: Vector de fuerza eléctrica ϵ_0:Permitividad del vacío q_i: Carga i $\vec{x}_i$: Vector de posición de la carga i
Campo eléctrico	$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$	$\vec{F}$: Fuerza electrostática q_0: carga puntual de prueba en el punto donde se quiere medir el campo eléctrico
Campo eléctrico de una carga puntual	$\vec{E}_q = k\frac{q\vec{r}}{\lvert\vec{r}\rvert^3}$	$\vec{F}$: Fuerza electrostática q_0: carga puntual de prueba en el punto donde se quiere medir el campo eléctrico