# Seminario 9: Fuerza, Campo y Potencial Eléctrico

Fabián Andrés Torres Ruiz*
* Departamento de Física, Universidad de Concepción, Chile

16 de Mayo de 2007.

## Problemas

1. (Problema 7, capitulo 23, Física, Raymond A. Serway, V2, cuarta edición)
   En la figura 1 se localizan tres cargas puntuales ubicadas en las esquinas de un triángulo equilátero. Calcule la fuerza eléctrica neta sobre la carga de $7\mu C$

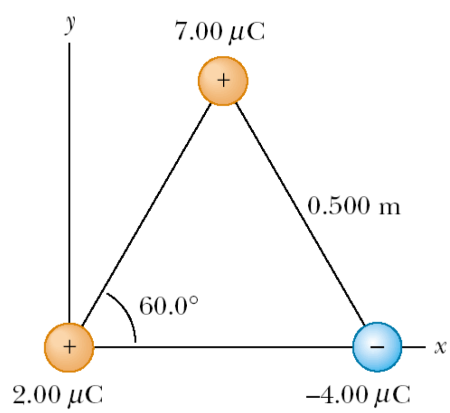


Figura 1: Cargas puntuales en un triángulo equilátero.

2. (Problema 11, capitulo 23, Física, Raymond A. Serway, V2, cuarta edición)
   Dos pequeñas esferas de plata, cada una con $100g$ de masa, están separadas $1m$. Calcule la fracción de los electrones de una esfera que deben transferirse a la otra para producir una fuerza atractiva de $1 \times 10^4 N$ (aproximadamente una tonelada) entre las esferas. (El número de electrones por átomo de plata es 47, y el número de átomos por gramo es el número de Avogadro dividido por la masa molar de la plata, 107.87)

3. (Problema 18, capitulo 23, Física, Raymond A. Serway, V2, cuarta edición)
   Un punto con una carga $q$ se localiza en $(x_0, y_0)$ en el plano $xy$. Demuestre que las componentes $x$ e $y$ debidas a esta carga son

$$E_x = \frac{kq(x - x_0)}{\left[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2\right]^{3/2}}$$
$$E_y = \frac{kq(y - y_0)}{\left[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2\right]^{3/2}}$$

4. (Problema 19, capitulo 23, Física, Raymond A. Serway, V2, cuarta edición)
   Dos cargas puntuales de $2\mu C$ se localizan sobre el eje $x$. Una está en $x = 1m$ y la otra en $x = -1m$ a) Determine el campo eléctrico sobre el eje $y$ en $y = 0.5m$. b) Calcule la fuerza eléctrica sobre una carga de $-3\mu C$ situada en el eje $y$ a una distancia $y = 0.5m$

# Soluciones

**Problema 1**

Usando el método escalar calculemos el módulo de la fuerza que la carga en el origen $q_1$ ejerce sobre la carga superior $q_0$. Se tiene que

$$\begin{aligned} F_{10} &= k\frac{q_1 q_0}{r^2} \\ &= \frac{9\times 10^9 \times 2\times 10^{-6}\times 7\times 10^{-6}}{0.5^2} \\ &= \frac{126\times 10^{-3}}{0.25} = 0.504N \end{aligned}$$

Calculemos ahora el módulo de la fuerza que ejerce la carga $q_2 = -4\mu C$ sobre la carga $q_0$, se tiene que

$$\begin{aligned} F_{20} &= k\frac{q_2 q_0}{r^2} \\ &= \frac{9\times 10^9 \times (-4)\times 10^{-6}\times 7\times 10^{-6}}{0.5^2} \\ &= -\frac{252\times 10^{-3}}{0.25} = -1.008N \end{aligned}$$

Vemos que en este caso la fuerza es atractiva, debido al signo $(-)$.

Como ya conocemos los módulos de la fuerza, ahora podemos calcular las direcciones basándonos en la geometría del problema. Para esto, vemos que la fuerza 1 actúa en la linea de la cara del triángulo empujando a la carga $q_0$, de donde deducimos que sus componentes deben ser ambas positivas y apuntando hacia el primer cuadrante. En tanto que la carga $q_2$ atrae a la carga $q_0$ en la dirección de la cara del triángulo, de modo que la fuerza apunta hacia el cuarto cuadrante y debe tener la componente en $x$ positiva y la componente en $y$ negativa.

Con esto, calculemos ahora los ángulos de las fuerzas Para la fuerza $F_{10}$ se tiene que

$$\begin{aligned} F_{10x} &= F_{10}\cos 60 = 0.5 * F_{10} = 0.252N \\ F_{10y} &= F_{10}\sin 60 = 0.87 * F_{10} = 0.438N \end{aligned}$$

Ahora, para la fuerza $F_{20}$ se tiene que

$$\begin{aligned} F_{20x} &= F_{20}\cos(-60) = 0.5 * F_{20} = 0.504N \\ F_{20y} &= F_{20}\sin(-60) = -0.87 * F_{20} = -0.873N \end{aligned}$$

De esta forma, la fuerza neta que actúa sobre la carga $q_0$ es

$$\begin{aligned} F &= \vec{F}_{10} + \vec{F}_{20} \\ &= 0.252\vec{i} + 0.438\vec{j} + 0.504\vec{i} - 0.873\vec{j} \\ &= (0.252 + 0.504)\vec{i} + (0.438 - 0.873)\vec{j} \\ &= 0.756\vec{i} - 0.438\vec{j} \end{aligned}$$

El modulo de la fuerza neta es

$$|F| = \sqrt{(0.756)^2 + (0.438)^2} = 0.87N$$

y apunta en la dirección

$$\theta_F = \arctan\left(\frac{-0.438}{0.756}\right) = -30.1^o = 329.9^o$$

Así finalmente la fuerza apunta al tercer cuadrante y en una dirección distinta a las caras del triángulo.

**Problema 2**

Si la separación entre las esferas es de $1m$ y queremos producir una fuerza de $1\times 10^4 N$, suponiendo que la carga que se le extrae a una esfera se le entrega a la otra, entonces la carga de una será $q$ y la de la otra sera $-q$ (a una se le suma la carga y a la otra se le quita). Entonces la ecuación para la fuerza de Coulomb será

$$\begin{aligned} F &= k\frac{q_1 q_2}{r^2} \\ F &= -k\frac{q^2}{1^2} \\ F &= -9\times 10^9 q^2 \end{aligned}$$

Reemplazando el valor de la fuerza se tiene que

$$q^2 = \frac{F}{9\times 10^9} = \frac{1\times 10^4}{9\times 10^9} = \frac{1}{9}\times 10^{-5}$$

Calculemos ahora la cantidad total de átomos que tienen las esferas. Para esto se nos dice que

$$\begin{aligned} N &= \frac{N_A}{m} = \frac{6,022\times 10^{23}}{107.87} \\ &= 5.58\times 10^{21}\text{átomos/ gramo} \end{aligned}$$

por lo que, para cada esfera de $100g$ se tiene que el total de átomos es $N = 100\times 5.58\times 10^{21} = 5.58\times 10^{23}$

ahora, la numero total de electrones que hay en las esferas es de

$$N_{\overline{e}} = 47 * N = 47 * 5.58\times 10^{23} = 262.26\times 10^{23}\overline{e}$$

Ahora, la carga de un electrón es de $\overline{e} = 1.6\times 10^{-19}C$, por lo que para obtener la carga necesitada se necesitan

$$n = \frac{\sqrt{\frac{1}{9}\times 10^{-5}}}{1.6\times 10^{-19}} = \frac{1.054\times 10^{-3}}{1.6\times 10^{-19}} = 6.59\times 10^{15}$$

De esta forma, la fracción de electrones que deben transmitirse son

$$\rho = \frac{n}{N_{\overline{e}}} = \frac{6.56\times 10^{15}}{262.26\times 10^{23}} = 2.51\times 10^{-10}$$

**Problema 3**

Para resolver este problema, utilizaremos el método vectorial. Para esto necesitamos fijar vectorialmente la posición de la carga fuente y del punto de observación. Del enunciado es claro que los vectores de posición son $(x_0, y_0)$ y $(x, y)$ para la fuente y el punto de observación respectivamente. Entonces, utilizando la definición de campo eléctrico tenemos que

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$$

donde $q_0$ es la carga de prueba, de modo que el campo generado por la carga puntual es

$$\vec{E} = k\frac{q\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \tag{1}$$

donde el vector de distancia entre los puntos es

$$\begin{aligned} \vec{r} &= (x, y) - (x_0, y_0) \\ &= (x - x_0, y - y_0) \end{aligned}$$

El módulo del vector de distancia es

$$|\vec{r}| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

Reemplazando esto en la ecuación 1 se tiene que

$$\begin{aligned} \vec{E} &= k\frac{q\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \\ &= k\frac{q(x - x_0, y - y_0)}{\left[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2\right]^{3/2}} \end{aligned}$$

De esta forma, podemos descomponer el campo en una componente en $x$ y otra en $y$ como

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{kq(x - x_0)}{\left[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2\right]^{3/2}} \\ E_y &= \frac{kq(y - y_0)}{\left[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2\right]^{3/2}} \end{aligned}$$

que es la expresión a la que se quería llegar.

**Problema 4**

Nuevamente, podemos utilizar las propiedades del campo eléctrico. En este caso podemos utilizar el principio de superposición, de modo que el campo total será la suma de los campos individuales, y como se trata de cargas puntuales, entonces las expresiones para los campos están dadas por

$$\vec{E}_i = k\frac{q_i\vec{r}_i}{|\vec{r}_i|^3}$$

donde el subíndice corre para las cargas 1 y 2.

Consideraremos, según la figura 2, como la carga 1 la carga que esta en la posición $x = -1m$ y como carga 2 la que esta en $x = 1m$.

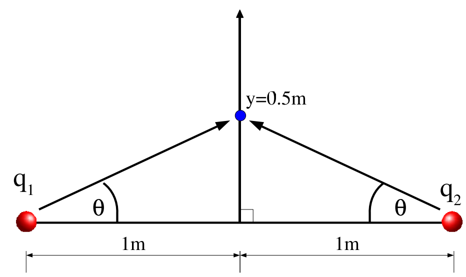


Figura 2: Cargas puntuales positivas sobre el eje $x$.

Utilizando el método vectorial, calculemos los vectores de distancia $\vec{r}_i$. que están dados por

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 &= \vec{x}_f - \vec{x}_1 \\ &= (0, 0.5) - (-1, 0) = (1, 0.5) \\ \vec{r}_2 &= \vec{x}_f - \vec{x}_2 \\ &= (0, 0.5) - (1, 0) = (-1, 0.5) \end{aligned}$$

donde $x_f$ corresponde a la posición final, o punto de observación y $x_i, i = 1, 2$ son las posiciones de las dos cargas respectivamente.

Calculemos ahora los módulos de los vectores $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$.

$$\begin{aligned} |\vec{r}_1| &= \sqrt{1^2 + 0.5^2} = 1.118 \\ |\vec{r}_2| &= \sqrt{1^2 + 0.5^2} = 1.118 \end{aligned}$$

Vemos que ambos módulos son iguales, lo que concuerda con la intuición, ya que las distancias entre las cargas y el punto son iguales.

Reemplazando ahora en la expresión del campo eléctrico, se tiene que

$$\begin{aligned} \vec{E}_1 &= k\frac{q_1\vec{r}_1}{|\vec{r}_1|^3} \\ &= \frac{9 \times 10^9 \times 2 \times 10^{-6} \times (1, 0.5)}{1.118^3} \\ &= 12880.93 \times (1, 0.5) \\ &= 12880.93\vec{i} + 6440.46\vec{j} \end{aligned}$$

Ahora, el campo producto de la carga 2 es

$$\begin{aligned} \vec{E}_2 &= k\frac{q_2\vec{r}_2}{|\vec{r}_2|^3} \\ &= \frac{9 \times 10^9 \times 2 \times 10^{-6} \times (-1, 0.5)}{1.118^3} \\ &= 12880.93 \times (-1, 0.5) \\ &= -12880.93\vec{i} + 6440.46\vec{j} \end{aligned}$$

Ahora, haciendo uso del principio de superposición, el campo total en el punto $y$ es

$$\begin{aligned}
\vec{E} &= \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \\
&= 12880.93\vec{i} + 6440.46\vec{j} - 12880.93\vec{i} + 6440.46\vec{j} \\
&= 12880.93\vec{j}
\end{aligned}$$

Así, vemos que el campo eléctrico esta dirigido solo a lo largo del eje $y$.

Si ahora queremos ver cual sería la fuerza ejercida sobre una carga de $q_3 = -3\mu m$ en ese punto (en el punto $y = 0.5m$), entonces, de la definición del campo eléctrico tenemos que

$$\begin{aligned}
\vec{E} &= \frac{\vec{F}}{q} \\
\vec{F} &= \vec{E}q
\end{aligned}$$

Reemplazando entonces se tiene que

$$\begin{aligned}
\vec{F} &= \vec{E}q \\
&= 12880.93 \times 3 \times 10^{-6} \\
&= 38.64 \times 10^{-3} N
\end{aligned}$$

que es la fuerza provocada por las dos cargas en el eje $x$.

# Apéndice

Cuadro 1: Formulas para Fuerza eléctrica.

| | | |
|---|---|---|
| Ley de Coulomb (escalar) | $\lvert F\rvert = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{\lvert r\rvert^2}$ | $F$: Magnitud de la fuerza<br>$q_i$: Carga $i$<br>$\epsilon_0$:Permitividad del vacío<br>$r$: Distancia entre las cargas |
| Ley de Coulomb (Vectorial) | $\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{\lvert\vec{x}_1-\vec{x}_2\rvert^3}(\vec{x}_1-\vec{x}_2)$ | $\vec{F}$: Vector de fuerza eléctrica<br>$\epsilon_0$:Permitividad del vacío<br>$q_i$: Carga $i$<br>$\vec{x}_i$: Vector de posición de la carga $i$ |
| Campo eléctrico | $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$ | $\vec{F}$: Fuerza electrostática<br>$q_0$: carga puntual de prueba en el punto donde se quiere medir el campo eléctrico |
| Campo eléctrico de una carga puntual | $\vec{E}_q = k\frac{q\vec{r}}{\lvert\vec{r}\rvert^3}$ | $\vec{F}$: Fuerza electrostática<br>$q_0$: carga puntual de prueba en el punto donde se quiere medir el campo eléctrico |