Seminario 8: Revisión de Certamen 1 y Electrostática

Fabián Andrés Torres Ruiz*

* Departamento de Física, Universidad de Concepción, Chile

03 de Mayo de 2007.

Problemas

1. Sobre un espejo se coloca perpendicularmente la punta A de un lápiz. La imagen A' de la punta está alejada de A una distancia de $3mm$. ¿Qué espesor tiene el vidrio?

2. Se tiene un espejo cóncavo de radio $R = 45cm$ y se coloca un objeto de $15cm$ de altura a la distancia $u = 60cm$. ¿Dónde se forma la imagen y qué tamaño tiene?

3. Un rayo de luz incide sobre un cristal de roca cuyo índice de refracción es $n = 1.545$. ¿Cuánto ha de valer el ángulo de incidencia a para que los rayos reflejado y refractado sean perpendiculares entre si?

4. Al observar un pez desde fuera del agua en un ángulo de 30^o con respecto a la superficie se percibe que éste se encuentra a $20cm$ de profundidad, Si el índice de refracción del agua es $n = 1.3$. ¿Cuál es la profundidad real a la que se encuentra el pez?

5. Una ranura de ancho $100\mu m$ es iluminada por un láser de longitud de onda $640nm$. Considere la distribución de intensidad de la luz del láser sobre una pantalla ubicada a $10m$ de la ranura

   a) Encuentre la distancia respecto de máximo central a la cual se observa el primer mínimo de difracción en la pantalla

   b) Encuentre el ancho del máximo central de difracción sobre la pantalla, que está definido como la distancia sobre la cual la intensidad es mayor o igual que la mitad del valor máximo.

   Nota: la intensidad se distribuye de acuerdo a

$$I = I_0 \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2}, \qquad \text{con} \qquad \alpha = \frac{\pi}{\lambda} d \sin\theta$$

6. (Problema 9, capitulo 23, Física, Raymond A. Serway, V2, cuarta edición)
   Cuatro cargas puntuales idénticas ($q = 10\mu C$) se localizan en las esquinas de un rectángulo, como se indica en la figura 1. Las dimensiones del rectángulo son $L = 60cm$ y $W = 15cm$. Calcule la magnitud y dirección de la fuerza eléctrica neta ejercida sobre la carga en la esquina izquierda inferior por las otras tres cargas.

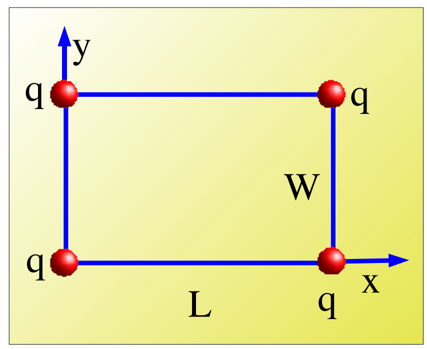

Figura 1: Esquema de cargas puntuales en un arreglo rectangular

Soluciones

Problema 1
Este es el problema mas simple, ya que nos piden encontrar el espesor de una placa de vidrio, la que sujeta la capa reflectora de un espejo plano.

Si queremos utilizar la ecuación de formación de imágenes, entonces debemos saber que para un espejo plano, el radio es infinito, esto quiere decir que el foco para un espejo plano también es infinito ($f = \infty$). Utilizando este valor, la ecuación para la formación de imágenes es

$$\begin{aligned} \frac{1}{s_o} + \frac{1}{s_i} &= \frac{1}{f} \\ \frac{1}{s_o} + \frac{1}{s_i} &= 0 \\ \frac{1}{s_o} &= -\frac{1}{s_i} \Rightarrow s_i = -s_o \end{aligned}$$

donde la imagen tiene un signo menos por ser virtual.

Vemos que la distancia imagen para un espejo plano es igual a la distancia objeto. De modo que la separación entre las dos imágenes, que corresponde a $s_i + s_o = 3mm$. Pero $s_i = s_o$ en magnitud, así se tiene que $2s_i = 3mm$, es decir $s_i = 1.5mm$.

Si de antemano se sabe que los espejos planos forman imágenes a la misma distancia que el objeto, entonces es claro que la separación entre imagen y objeto es $2s_o = 2s_i$, de donde se deduce rápidamente que el espesor del espejo debe ser de $1.5mm$

Problema 2
Por ser un espejo cóncavo sabemos que su radio debe ser positivo, de modo que su radio es negativo, lo que nos entrega una distancia focal

$$\begin{aligned} f &= -\frac{R}{2} \\ &= -(\frac{-45}{2}) = 22.5cm \end{aligned}$$

Con esto, ahora aplicamos la ecuación de los espejos, lo que nos entrega como resultado que la imagen se forma en

$$s_i = \frac{f s_o}{s_o - f}$$

La distancia objeto es $s_o = 60cm$, de modo que se tiene que

$$s_i = \frac{22.5 \cdot 60}{60 - 22.5} = \frac{1350}{37.5} = 36cm$$

Vemos que la distancia es positiva, por lo que es una imagen real. La magnificación en este caso es

$$M = -\frac{s_i}{s_o} = -\frac{36}{60} = -0.6$$

Así, la imagen es real, invertida y disminuida con respecto al objeto real. Como el objeto real tiene una altura de $15cm$, entonces la imagen tendrá una altura de

$$y_i = My_o = -0.6 \cdot 15 = -9cm$$

Es decir la imagen esta bajo el eje óptico y tiene un tamaño de $9cm$.

Problema 3
Como se vio en el seminario 7, el problema 7, podemos utilizar la ley de Brewster para resolver el problema. Como se tienen 3 haces importantes,debemos ver las relaciones en los ángulos de cada haz con respecto al resto.

El haz reflejado forma el mismo ángulo con respecto a la vertical que el haz incidente, además forma un ángulo de 90^o con respecto al rayo transmitido, y el haz transmitido esta relacionado con el haz incidente mediante la ecuación de Snell (ver figura 2), de modo que

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$$

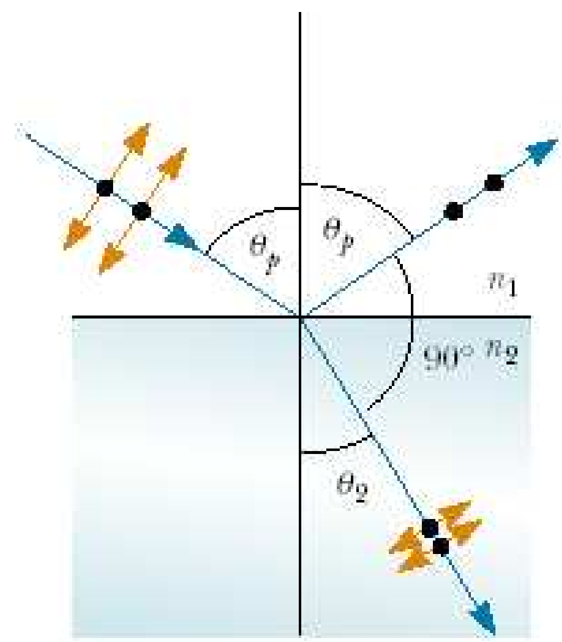

Figura 2: Relaciones ente los ángulos para la ley de Brewster

pero de la figura vemos que

$$\theta_1 + \theta_2 + 90^o = 180^o \quad \Rightarrow \quad \theta_2 = 90^o - \theta_1$$

Reemplazando esto en la ecuación de Snell (ecuación 1) se tiene que

$$n_2 = n_1 \frac{\sin\theta_1}{\sin(90^o - \theta_1)}$$

Utilizando la identidad trigonométrica para la suma de ángulos en el seno se tiene que

$$\begin{aligned}
\sin(\theta_1 \pm \theta_2) &= \sin\theta_1 \cos\theta_2 \pm \sin\theta_2 \cos\theta_1 \\
\sin(90 - \theta_1) &= \sin 90 \cos\theta_1 - \sin\theta_1 \cos 90
\end{aligned}$$

$$\sin(90 - \theta_1) = \cos\theta_1$$

Reemplazando en la ecuación 1 se obtiene finalmente que

$$n_2 = n_1 \frac{\sin\theta_1}{\cos\theta_1} = n_1 \tan\theta_1$$

Como estamos considerando que el medio 1 es el aire, entonces el ángulo de incidencia del haz debe ser

$$\begin{aligned}
\theta_1 &= \arctan(n_2) \\
&= \arctan(1.545) = 57.09^o
\end{aligned}$$

De esta forma, el haz debe incidir en un ángulo de 57.09^o para que el ángulo entre el haz reflejado y el transmitido sea de 90^o.

Problema 4
El ángulo de incidencia, medido con respecto a la verticales de 60^o.

Sabemos de la figura que la distancia d esta dada por

$$\tan 30^o = \frac{20}{d} \Rightarrow \quad d = \frac{20}{\tan 30^o} = 34.64cm$$

Ahora, de la ley de Snell sabemos que

$$\begin{aligned}
\sin\theta_2 &= \frac{n_1}{n_2}\sin\theta_1 \\
\theta_2 &= \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2}\sin\theta_1\right)
\end{aligned}$$

Como el medio 1 es el aire, entonces el ángulo de transmisión es

$$\begin{aligned}
\theta_2 &= \arcsin\left(\frac{3}{4}\sin 60\right) \\
&= \arcsin(0.65) \\
&= 40.5^o
\end{aligned}$$

Nuevamente de la figura, vemos que

$$\tan\theta_2 = \frac{d}{h}$$

de donde obtenemos finalmente que

$$\begin{aligned}
h &= \frac{d}{\tan\theta_2} \\
&= \frac{34.64}{0.85} = 40.75cm
\end{aligned}$$

Es decir, el pez esta sumergido a una distancia de $h = 40.75cm$ desde la superficie del agua.

Problema 5
La distribución de intensidad es

$$I = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{\lambda} d \sin\theta\right)}{\left(\frac{\pi}{\lambda} d\sin\theta\right)^2}$$

para que esta expresión sea un mínimo, entonces el numerador debe ser cero, de modo que

$$\begin{aligned}
\sin^2\left(\frac{\pi}{\lambda} d \sin\theta\right) &= 0 \\
\Rightarrow \qquad \frac{\pi}{\lambda} d \sin\theta &= \pi \\
\Rightarrow \qquad \sin\theta &= \frac{\lambda}{d}
\end{aligned}$$

(Ojo: no se iguala el argumento del numerador a cero porque es el mismo argumento del denominador, por lo que si se evalúa en cero se tiene la expresión $\frac{0}{0}$ lo que no esta definido, por eso se evalúa en el siguiente cero del numerador, es decir en π)

De esta forma, el primer mínimo se obtiene a un ángulo

$$\begin{aligned}
\sin\theta \approx \theta &= \left(\frac{\lambda}{d}\right) \\
&= \left(\frac{640 \times 10^{-9}}{100 \times 10^{-6}}\right) = 640 \times 10^{-5} rad
\end{aligned}$$

Como la distancia desde la rendija al punto de observación es de $10m$, entonces la tangente sera

$$\tan\theta = \frac{h}{d} \approx \theta$$

donde h es la posición del mínimo con respecto al máximo central y $d = 10m$ es la distancia entre el plano de observación y la rendija.

Reemplazando los valores se tiene que

$$h = d \cdot \theta = 10 \times 640 \times 10^{-5} = 640 \times 10^{-4} = 6.4cm$$

El mínimo de intensidad se encuentra a una altura de $6.4cm$ sobre el máximo central.

Para la pregunta b, debemos calcular la posición angular a la que corresponde una intensidad de $I_o/2$.

Reemplazando se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{I_0}{2} &= I_0\frac{\sin^2\alpha}{\alpha^2}\\ 0.5 &= \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{\lambda}d\sin\theta\right)}{\left(\frac{\pi}{\lambda}d\sin\theta\right)^2}\\ \left(\frac{\pi}{\sqrt{2}\lambda}d\sin\theta\right)^2 &= \sin^2\left(\frac{\pi}{\lambda}d\sin\theta\right)\\ \frac{\pi}{\sqrt{2}\lambda}d\sin\theta &= \sin\left(\frac{\pi}{\lambda}d\sin\theta\right)\end{aligned}$$

Esta no es una ecuación trivial de resolver, de modo que, para este caso, podemos asumir que el valor medio de la intensidad ocurren en el punto medio entre el máximo y el mínimo, de modo que el ancho aproximado del máximo central será de $w = 6.4cm$.

Problema 6

Como la fuerza es una cantidad vectorial, entonces podemos calcular las magnitudes de las fuerzas independientes de cada carga sobre la última y después sumarlas vectorialmente.

Tenemos dos métodos para calcular las fuerzas sobre la partícula, uno es el método escalar, en el cual mediante las reglas básicas de electrostáticas se determina la dirección de las fuerzas y así también la fuerza resultante, y el otro método es el método vectorial, en el cual se introducen los vectores de posición de las cargas junto con sus magnitudes y la ecuación entrega la dirección y magnitud de la fuerza resultante. Resolveremos este problema utilizando ambos métodos.

Método escalar

En este método, podemos obtener los módulos (magnitud) de las fuerzas que actúan sobre la partícula en cuestión.

Sabemos que la suma de las fuerzas resultantes nos dará la fuerza neta que actúa sobre la partícula, es decir

$$\vec{F} = F_1\hat{F}_1 + F_2\hat{F}_2 + F_3\hat{F}_3$$

donde los vectores $\hat{F}_i$ son vectores unitarios que indican la dirección en que actúa la fuerza.

Calculemos las magnitudes de las fuerzas, las que están dadas por la expresión

$$F_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}q_i$$

donde q_i es la carga de la partícula actuante, y q es la carga de la partícula sobre la cual queremos actuar. Nombrando las cargas como q_1, q_2 y q_3 tales que q_1 es la que esta sobre el eje y, q_2 es la carga que esta en diagonal y q_3 es la carga que esta sobre el eje x, entonces se tiene que

$$\begin{aligned}F_1 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{10\times10^{-6}\times10\times10^{-6}}{(15\times10^{-2})^2}\\ &= 9\times10^9\frac{(10\times10^{-6})^2}{(15\times10^{-2})^2}\\ &= 9\times10^9\frac{(100\times10^{-12})}{(225\times10^{-4})} = 40N\end{aligned}$$

Entonces la magnitud de la fuerza ejercida por la carga 1 es de $40N$. Como se puede ver de la figura, como ambas cargas son positivas, la fuerza debe ser repulsiva, esto indica que la dirección de la fuerza debe ser a lo largo del eje y, pero en sentido negativo, es decir apunta hacia abajo. su Vector unitario sera entonces $\hat{F}_1 = -\hat{\jmath}$, así la fuerza F_1 se escribe como $\vec{F}_1 = -40\hat{\jmath}N$.

La segunda carga esta separada a una distancia d del origen. esta distancia d la calculamos usando el teorema de Pitagoras, de modo que tiene un valor de $d = \sqrt{15^2+60^2} \approx 61.85cm$. Reemplazando en la ecuación para la fuerza, se tiene que

$$\begin{aligned}F_2 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{10\times10^{-6}\times10\times10^{-6}}{(\sqrt{15^2+60^2}\times10^{-2})^2}\\ &= 9\times10^9\frac{100\times10^{-12}}{(15^2+60^2)\times10^{-4}}\\ &= \frac{900\times10^{-3}}{3825\times10^{-4}} = 2.35N\end{aligned}$$

De esta forma, la magnitud de la fuerza de Coulomb producida por la segunda carga es de $F_2 = 2.28N$. Para saber la dirección de la fuerza, podemos descomponer la magnitud en componentes. Para esto, calculemos el ángulo que se forma entre la linea que une las cargas y el eje x. Utilizando la tangente se tiene que el ángulo será

$$\tan\theta = \frac{W}{L} = \frac{15}{60} \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{15}{60}\right) = 14.04^o$$

Luego, como la fuerza producida por la carga 2 apunta hacia el tercer cuadrante, la componente horizontal de la fuerza sera negativa al igual que la componente vertical. Las magnitudes de la fuerza por ejes sera entonces

$$\begin{aligned}\vec{F}_2 &= F_{2x}\hat{\imath} + F_{2y}\hat{\jmath}\\ F_{2x} &= F_2\cos(180+\theta) = -2.21N\\ F_{2y} &= F_2\sin(180+\theta) = -0.55N\end{aligned}$$

Luego la forma vectorial de la fuerza 2 sera

$$\vec{F}_2 = -2.21\hat{\imath} - 0.55\hat{\jmath}\ N$$

Finalmente, la tercera carga produce una fuerza dirigida en el eje x pero en el sentido negativo, por lo que su vector unitario será $\hat{F}_3 = -\hat{\imath}$ y su magnitud sera

$$
\begin{aligned}
F_3 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{10\times 10^{-6}\times 10\times 10^{-6}}{(60\times 10^{-2})^2} \\
&= 9\times 10^9\frac{100\times 10^{-12}}{3600\times 10^{-4}} = 2.5N
\end{aligned}
$$

De esta forma, ahora podemos sumar estas tres fuerzas y obtener la fuerza resultante que es

$$
\begin{aligned}
\vec{F} &= \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 \\
&= -40\hat{\jmath} - 2.21\hat{\imath} - 0.55\hat{\jmath} - 2.5\hat{\imath} \\
&= -(2.21+2.5)\hat{\imath} - (40+0.55)\hat{\jmath} \\
&= -4.71\hat{\imath} - 40.55\hat{\jmath}
\end{aligned}
$$

De esta forma la magnitud de la fuerza resultante es

$$F = \sqrt{(-4.71)^2 + (-40.55)^2} = 40.82N$$

y estará orientada en un ángulo de (hay que recordar que apunta hacia el tercer cuadrante, lo que quiere decir que su valor tiene que estar entre 180^o y 270^o)

$$\tan\theta' = \frac{-40.55}{-4.71} \Rightarrow \theta' = 83.37^o$$

Sumándole 180^o se obtiene que el ángulo de la fuerza es de 263.4^o.

Método Vectorial

Con este método, debemos identificar la posición de cada carga en forma vectorial. De este modo la carga 1 esta colocada en $\vec{x}_1 = (0, W) = (0, 0.15)$, la carga 2 esta en $x_2 = (0.6, 0.15)$ y la carga 3 esta en $x_3 = (L, 0) = (0.6, 0)$. La carga sobre la que queremos actuar esta en el origen del sistema cartesiano, por lo que su vector posición será $\vec{x}_0 = \vec{0}$.

Calculemos ahora los módulos de las distancias. Se tiene que

$$
\begin{aligned}
|\vec{x}_1 - \vec{x}_0| &= \sqrt{0^2 + 0.15^2} = 0.15 \\
|\vec{x}_2 - \vec{x}_0| &= \sqrt{0.6^2 + 0.15^2} = 0.618 \\
|\vec{x}_1 - \vec{x}_0| &= \sqrt{0.6^2 + 0^2} = 0.6
\end{aligned}
$$

Utilicemos ahora la forma vectorial de la ley de Coulomb, es decir, la expresión

$$\vec{F}_{i,j} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_i q_j}{|\vec{x}_j - \vec{x}_i|^3}(\vec{x}_j - \vec{x}_i)$$

Evaluemos entonces para la primera carga, se tiene que

$$
\begin{aligned}
\vec{F}_{1,0} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_0}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_0|^3}(\vec{x}_0 - \vec{x}_1) \\
&= 9\times 10^9\frac{10\times 10^{-6}\times 10\times 10^{-6}}{0.15^3}(0, 0.15) \\
&= \frac{900\times 10^{-3}}{3.375\times 10^{-3}}(0, -0.15) \\
&= (0, -\frac{900\times 10^{-3}}{3.375\times 10^{-3}}\times 0.15) \\
&= (0, -40)N
\end{aligned}
$$

Para $\vec{F}_2$ se tiene que

$$
\begin{aligned}
\vec{F}_{2,0} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_0}{|\vec{x}_2 - \vec{x}_0|^3}(\vec{x}_0 - \vec{x}_2) \\
&= 9\times 10^9\frac{10\times 10^{-6}\times 10\times 10^{-6}}{0.618^3}(-0.6, -0.15) \\
&= \frac{900\times 10^{-3}}{236\times 10^{-3}}(-0.6, -0.15) \\
&= (-\frac{900\times 10^{-3}}{236\times 10^{-3}}\times 0.6, -\frac{900\times 10^{-3}}{236\times 10^{-3}}\times 0.15) \\
&= (-2.29, -0.57)N
\end{aligned}
$$

Y para $\vec{F}_3$ se tiene que

$$
\begin{aligned}
\vec{F}_{3,0} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_3 q_0}{|\vec{x}_3 - \vec{x}_0|^3}(\vec{x}_0 - \vec{x}_3) \\
&= 9\times 10^9\frac{10\times 10^{-6}\times 10\times 10^{-6}}{0.6^3}(-0.6, 0) \\
&= \frac{900\times 10^{-3}}{216\times 10^{-3}}(-0.6, 0) \\
&= (-\frac{900\times 10^{-3}}{216\times 10^{-3}}\times 0.6, 0) \\
&= (-2.5, 0)N
\end{aligned}
$$

Apéndice

Cuadro 1: Formulas para Fuerza eléctrica.

Ley de Coulomb (escalar)	$\|F\| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{\|r\|^2}$	F: Magnitud de la fuerza q_i: Carga i ϵ_0:Permitividad del vacío r: Distancia entre las cargas
Ley de Colomb (Vectorial)	$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{\|\vec{x}_1 - \vec{x}_2\|^3}(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)$	$\vec{F}$: Vector de fuerza electrica ϵ_0:Permitividad del vacío q_i: Carga i $\vec{x}_i$: Vector de posición de la carga i