

Seminario 6: Difracción y polarización

Fabián Andrés Torres Ruiz*

* Departamento de Física, Universidad de Concepción, Chile

25 de Abril de 2007.

Problemas

1. (Problema 5, capítulo 38, Física, Raymond A. Serway, V2, cuarta edición)
La pupila del ojo de un gato se estrecha como una rendija de $0,5mm$ de ancho con luz del día. ¿Cual es la resolución angular? (Emplee luz de $500nm$ en su cálculo)
2. (Problema 7, capítulo 38, Física, Raymond A. Serway, V2, cuarta edición)
Una pantalla se pone a $50cm$ de una rendija, la cual esta iluminada con luz de $690nm$. Si la distancia entre el primero y el tercer mínimos en el patrón de difracción es $3mm$ ¿Cual es el ancho de la rendija?
3. (Problema 11, capítulo 38, Física, Raymond A. Serway, V2, cuarta edición)
Un patrón de difracción se forma sobre una pantalla a $120cm$ de una rendija de $0,4mm$ de ancho. Se emplea luz monocromática de $546,1nm$. Calcule la intensidad fraccionaria $\frac{I}{I_0}$ en un punto sobre la pantalla a $4,1mm$ del centro del máximo principal.
4. (Problema 13, capítulo 38, Física, Raymond A. Serway, V2, cuarta edición)
Un láser de He-Ne emite luz que tiene una longitud de onda de $632,8nm$. La abertura circular a través de la cual el haz emerge tiene un diámetro de $0,5cm$. Estime el diámetro del haz a $10km$ del láser.
5. (Problema 15, capítulo 38, Física, Raymond A. Serway, V2, cuarta edición)
En la noche del 18 de Abril de 1775, una señal fue enviada desde el campanario de la vieja iglesia del Norte a Paul Revere, quien se encontraba a $1,8millas$ uno si es por tierra, dos si es por mar". ¿A que separación mínima el sacristán debía poner separadas las linternas se modo que Paul Revere pudiera recibir el mensaje completo? Suponga que las pupilas de Paul Revere tienen un diámetro de $4mm$ en la noche y que la luz de la vela tiene una longitud de onda predominante de $580nm$
6. (Problema 19, capítulo 38, Física, Raymond A. Serway, V2, cuarta edición)
¿A que distancia podría uno distinguir teóricamente dos faros de automóvil separados por $1,4m$? Suponga un diámetro de pupila de $6mm$ y faros de luz amarilla ($\lambda = 580nm$) El índice de refracción en el ojo es aproximadamente 1,33

Soluciones

Problema 1

La resolución angular para una rendija esta dada por la relación

$$\theta_{min} = \frac{\lambda}{a}$$

Si la rendija es de $0,5mm$ y la longitud de onda es de $500nm$, entonces la mínima resolución del gato es

$$\begin{aligned}\theta_{min} &= \frac{500 \times 10^{-9}}{0,5 \times 10^{-3}} \\ &= \frac{500 \times 10^{-9}}{500 \times 10^{-6}} = 1 \times 10^{-3} rad\end{aligned}$$

Como π radianes corresponden a 180° , entonces

$$\left. \begin{aligned} 1 \times 10^{-3} \text{ rad} &\rightarrow x^\circ \\ \pi \text{ rad} &\rightarrow 180^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow x = \frac{1 \times 10^{-3} \times 180}{\pi}$$

$$x = \frac{0,18}{\pi} = 0,057^\circ$$

esto es equivalente a $3'25,2''$ de grado. El ojo humano posee una resolución del orden de $45''$ de grado de resolución, es decir 47 veces mejor aproximadamente.

Problema 2

Como se ve en la figura 1, debemos calcular la posición de los mínimos 1 y 3.

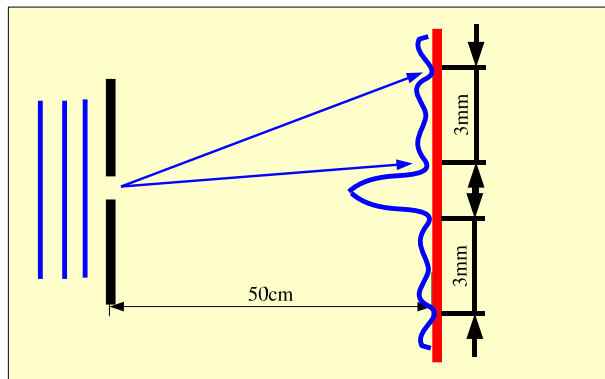


Figura 1: Difracción de una rendija simple

Para esto, usamos la relación

$$\theta_m = m \frac{\lambda}{a} \quad (1)$$

De los datos que tenemos se sabe que la separación entre los mínimos corresponde a

$$y = 3 \times 10^{-3} = \tan \theta_3 - \tan \theta_1$$

Como se trata de ángulos pequeños, podemos escribir que

$$\theta_3 - \theta_1 = 3 \times 10^{-3}$$

Reemplazando la expresión 1 en esta última se tiene que

$$\begin{aligned} 3 \frac{\lambda}{a} - \frac{\lambda}{a} &= 3 \times 10^{-3} \\ 2 \frac{\lambda}{a} &= 3 \times 10^{-3} \\ a &= \frac{2\lambda}{3 \times 10^{-3}} \\ &= \frac{2 \times 690 \times 10^{-9}}{3 \times 10^{-3}} \\ &= 2 \times 230 \times 10^{-9} \times 10^3 \\ &= 460 \times 10^{-6}\end{aligned}$$

es decir, el ancho de la rendija es $460\mu m$.

Problema 3

La distribución de intensidad para un patrón de difracción de una rendija simple esta dada por la expresión

$$I_\theta = I_0 \left(\frac{\sin(\beta/2)}{\beta/2} \right)^2 \quad \beta = \frac{2\pi a}{\lambda} \sin \theta$$

Reemplazando en forma explícita se tiene que

c

Se quiere medir la intensidad fraccionaria de luz en un punto a $4,1mm$ sobre el punto medio y alejado $1,2m$, esto nos da un ángulo de

$$\tan \theta = \frac{4,1 \times 10^{-3}}{1,2} \Rightarrow \theta \approx 0,196^\circ \approx 3,42 \times 10^{-3} rad$$

Reemplazando este valor y los demás se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{\beta}{2} &= \frac{\pi a}{\lambda} \sin \theta \\ &= \frac{\pi \times 0,4 \times 10^{-3}}{546,1 \times 10^{-9}} \sin(0,196) = 7,8717\end{aligned}$$

Luego, la intensidad en ese punto sera

$$\begin{aligned} \frac{I_\theta}{I_0} &= \left(\frac{\sin(\beta/2)}{\beta/2} \right)^2 \\ &= \left(\frac{\sin(7,8717)}{7,8717} \right)^2 = 0,127^2 = 1,61 \times 10^{-2}\end{aligned}$$

Es decir, en ese punto la intensidad de la luz corresponde a un 1,61 % de la intensidad máxima incidente.(OJO: Para evaluar, la calculadora debe estar calculando en radianes.)

Problema 4

Los mínimos para aperturas circulares están dados por la expresión

$$\theta_{min} = 1,22 \frac{\lambda}{D}$$

donde el factor 1.22 se obtiene de un estudio matemático complejo en el que están involucrados funciones especiales como lo son los polinomios de Bessel.

Reemplazando los valores se tiene que

$$\begin{aligned}\theta_{min} &= 1,22 \frac{632,8 \times 10^{-9}}{0,5 \times 10^{-2}} \\ &= 1,22 \frac{632,8 \times 10^{-9}}{0,5 \times 10^{-2}} = 1,544 \times 10^{-4} \text{ rad}\end{aligned}$$

La tangente se define como el cateto opuesto sobre el cateto adyacente. Como ya conocemos el ángulo y el cateto adyacente $x = 10 \times 10^3 m$, podemos obtener el cateto opuesto y como

$$\begin{aligned}y &= x \tan \theta_{min} \\ &= 10 \times 10^3 \tan 1,544 \times 10^{-4} = 1,544\end{aligned}$$

Este valor corresponde a la distancia desde el centro del perfil al primer mínimo de difracción, por lo que si queremos obtener el diámetro debemos multiplicar por dos, con lo que se obtiene que el diámetro del láser a $10km$ es de $3,09m$.

Problema 5

Primero que nada, utilicemos medidas del sistema internacional, la distancia entre el campanario hasta don Paul es de $1,8millas$, por lo que en metros corresponde a $2,8962km$. La resolución angular máxima para don Paul, el cual poseía una pupila de $4mm$ de diámetro, usando una longitud de onda de $\lambda = 580 \times 10^{-9}m$ es de

$$\theta_{min} = 1,22 \frac{\lambda}{D} = 1,22 \frac{580 \times 10^{-9}}{4 \times 10^{-3}} = 1,769 \times 10^{-4} \text{ rad}$$

De esta forma, podemos decir que don Paul podrá resolver dos fuentes siempre y cuando estas estén separadas de modo que subtiendan un ángulo como mínimo de $1,769 \times 10^{-4} \text{ rad}$. En el caso de que la distancia desde las fuentes hasta don Paul es de $2,8962km$, entonces la separación de las linternas debe ser de

$$y = d \tan \theta_{min} = 2896,2 \times 1,769 \times 10^{-4} = 0,512m$$

es decir, deben estar separadas aproximadamente medio metro para poder resolverlas a esa distancia.

Problema 6

La luz al pasar al interior del ojo cambia su longitud de onda, ya que el índice de refracción del ojo se puede aproximar por $n = 1,33$ entonces la longitud de onda sera $\lambda = \frac{580 \times 10^{-9}}{1,33} = 436,1 \times 10^{-9}m$

Como el diámetro del ojo lo podemos aproximar a $6 \times 10^{-3}m$, entonces la resolución máxima del ojo para esa longitud de onda sera de

$$\theta_{min} = 1,22 \frac{\lambda}{D} = 1,22 \frac{436,1 \times 10^{-9}}{6 \times 10^{-3}} = 8,87 \times 10^{-5} \text{ rad}$$

Ahora, como la separación entre las luces es de $1,4m$, entonces la distancia a la cual se pueden distinguir estas dos luces es de

$$x = \frac{y}{\theta} = \frac{1,4m}{8,87 \times 10^{-5}} = 15783,54m = 15,8km$$

Es decir, se pueden resolver las luces a una distancia de 15 kilómetros aproximadamente.

Apéndice

Cuadro 1: Formulas mas utilizadas

Índice de refracción	$n = \frac{c}{v}$	c : velocidad de la luz en el vacío v : Velocidad de la luz en el medio óptico.
Ley de reflexión	$\theta'_1 = \theta_1$	θ'_1 : Ángulo formado entre la normal a la superficie y el haz reflejado θ_1 : Ángulo formado por el haz incidente y la normal a la superficie
Ley de Snell	$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$	n_i : índice de refracción del medio i de propagación θ_1 : Ángulo formado por el haz incidente y la normal a la superficie 1 θ_2 : Ángulo formado por el haz propagado y la normal a la superficie 2
Ángulo crítico para reflexión total interna	$\sin \theta_C = \frac{n_1}{n_2}$	n_i : índice de refracción del medio i de propagación θ_C : Ángulo crítico de reflexión total interna
Intensidad de la luz reflejada (solo para incidencia normal)	$I = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2 I_0$	n_i : Índice de refracción del medio i de propagación I_0 : Intensidad de la luz incidente
$\sin(\alpha \pm \beta)$	$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$	α, β : ángulos cualquiera
Fórmula de los espejos	$\frac{1}{s_o} + \frac{1}{s_i} = -\frac{2}{R}$	s_o : distancia espejo-objeto s_i : distancia espejo-imagen R : Radio De la superficie esférica
Relación Foco-Radio para espejos	$f = -\frac{R}{2}$	f : Foco del espejo R : Radio de la superficie esférica ($R > 0$ para espejos convexos y $R < 0$ para espejos cóncavos)
Ecuación del constructor de lentes	$\frac{1}{f} = (n - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$	f : Foco del lente R_1 : Radio de la primera superficie R_2 : Radio de la segunda superficie
Magnificación transversal	$M = -\frac{s_i}{s_o} = \frac{y_i}{y_o}$	s_i : Distancia imagen s_o : Distancia objeto y_i : Altura imagen y_o : Altura Objeto

Cuadro 2: Imágenes de objetos reales formadas por espejos esféricos

Cóncavo				
Objeto	Imagen			
Posición	Tipo	Posición	Orientación	Tamaño relativo
$\infty > s_o > 2f$	Real	$f < s_i < 2f$	Invertida	Disminuida
$s_o = 2f$	Real	$s_i = 2f$	Invertida	Mismo tamaño
$f < s_o < 2f$	Real	$\infty > s_i > 2f$	Invertida	Aumentada
$s_o = f$		$\pm\infty$		
$s_o < f$	Virtual	$ s_i > s_o$	Derecha	Aumentada
Convexo				
Objeto	Imagen			
Posición	Tipo	Posición	Orientación	Tamaño relativo
Cualquier lugar	Virtual	$ s_i < f $, $s_o > s_i $	Derecha	Disminuida

Cuadro 3: Convenio de signos para espejos esféricos(V, punto sobre la superficie del espejo, C centro de curvatura)

Cantidad	Signo	
	+	-
s_o	A la izquierda de V, objeto real	A la derecha de V, Objeto virtual
s_i	A la izquierda de V, imagen real	A la derecha de V, imagen virtual
f	Espejo cóncavo	Espejo convexo
R	C a la derecha de V, Convexo	C a la izquierda de V, Cóncavo
y_o	Por encima del eje, objeto derecho	Por debajo del eje, objeto invertido
y_i	Por encima del eje, imagen derecha	Por debajo del eje, imagen invertida

Cuadro 4: Imágenes de objetos reales formadas por lentes delgadas

Convexa				
Objeto	Imagen			
Posición	Clase	Posición	Orientación	Tamaño relativo
$\infty > s_o > 2f$	Real	$f < s_i < 2f$	Invertida	Disminuida
$s_o = 2f$	Real	$s_i = 2f$	Invertida	Mismo tamaño
$f < s_o < 2f$	Real	$\infty > s_i > 2f$	Invertida	Aumentada
$s_o = f$		$\pm\infty$		
$s_o < f$	Virtual	$ s_i > s_o$	Derecha	Aumentada
Cóncava				
Objeto	Imagen			
Posición	Tipo	Posición	Orientación	Tamaño relativo
Cualquier lugar	Virtual	$ s_i < f $, $s_o > s_i $	Derecha	Disminuida

Cuadro 5: Significado asociado con los signos de varios parámetros para lentes delgadas e interfaces esféricas

Cantidad	Signo	
	+	-
s_o	Objeto real	Objeto virtual
s_i	Imagen real	Imagen virtual
f	Lente convergente	Lente divergente
y_o	Objeto derecho	Objeto invertido
y_i	Imagen derecha	Imagen invertida
M_T	Imagen derecha	Imagen invertida
R_1, R_2	Centro de curvatura detrás de la lente	Centro de curvatura delante de la lente

Cuadro 6: Formulas para la interferencia y difracción.

Longitud de onda en un medio óptico	$\lambda_n = \frac{\lambda}{n}$	λ_n : Longitud de onda en el medio λ : Longitud de onda en el vacío n : Índice de Refracción del medio óptico
Condición de interferencia constructiva para películas delgadas	$d = \frac{(m+\frac{1}{2})\lambda_n}{2}$	d : Espesor de la película m : Número entero positivo o cero λ_n : Longitud de onda en el medio óptico
Condición de interferencia destructiva para películas delgadas	$d = \frac{m\lambda_n}{2}$	d : Espesor de la película m : Número entero positivo o cero λ_n : Longitud de onda en el medio óptico
Máximos de interferencia, Experimento de Young	$d \sin \theta = m\lambda$	d : Separación de las rendijas θ : Ángulo del máximo m : Índice para reconocer el máximo λ : Longitud de onda
Distribución de intensidad promedio para patrón de interferencia	$I_p = I_0 \cos^2 \left(\frac{\pi d \sin \theta}{\lambda} \right) = I_0 \cos^2 \left(\frac{\pi dy}{\lambda L} \right)$	I_0 : Intensidad de luz incidente d : Separación de las rendijas θ : Ángulo del máximo λ : Longitud de onda y : altura del punto deseado con respecto al máximo central. L : Separación entre las rendijas y el plano de detección
Relación para Interferómetro de Michelson	$\Delta L = N \frac{\lambda}{4}$	N : Número de franjas contadas ΔL : Desplazamiento del espejo λ : Longitud de onda
Mínimos de difracción para una rendija	$\sin \theta_m = m \frac{\lambda}{a}$	θ : Posición angular del mínimo m : Orden del mínimo λ : Longitud de onda a : Ancho de la rendija
Distribución de intensidad para 1 rendija	$I_\theta = I_0 \left(\frac{\sin(\beta/2)}{\beta/2} \right)^2$ $\beta = \frac{2\pi a}{\lambda} \sin \theta$	I_0 : Intensidad en el máximo del patrón a : Ancho de la rendija λ : Longitud de onda
Ángulo de resolución mínima para 1 rendija	$\theta_{min} = \frac{\lambda}{a}$	θ_{min} : Posición angular del mínimo expresada en radianes a : Ancho de la rendija λ : Longitud de onda
Ángulo de resolución mínima para 1 círculo	$\theta_{min} = 1,22 \frac{\lambda}{D}$	θ_{min} : Posición angular del mínimo expresada en radianes D : Diámetro de la apertura λ : Longitud de onda
Ecuación para redes de difracción	$d \sin \theta = m\lambda$	d : Separación entre las rendijas θ : posición angular del máximo m : Orden del máximo λ : Longitud de onda
Potencia de resolución de una rejilla	$R = \frac{\lambda}{\lambda_2 - \lambda_1}, \quad \lambda = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}$	λ_1 : Longitud de onda 1 λ_2 : Longitud de onda 2 casi igual a la anterior