

Seminario 4: Óptica Geométrica

Fabián Andrés Torres Ruiz*

* Departamento de Física, Universidad de Concepción, Chile

17 de Abril de 2007.

Problemas

- (Problema 15, capítulo 36, Física, Raymond A. Serway, V2, cuarta edición)
Un espejo convexo esférico tiene un radio de 40cm . Determine la posición de la imagen virtual y el aumento para distancias al objeto de a) 30cm y b) 60cm . c) ¿Las imágenes están de pie o invertidas?
- (Problema 27, capítulo 36, Física, Raymond A. Serway, V2, cuarta edición)
La cara izquierda de un lente biconvexo tiene un radio de curvatura de 12cm , en tanto que la cara derecha tiene un radio de curvatura de 18cm . El índice de refracción del vidrio es de $n = 1,44$.
 - Calcule la longitud focal del lente.
 - Calcule la longitud focal si se intercambian los radios de curvatura de las dos caras.
- (Problema 32, capítulo 36, Física, Raymond A. Serway, V2, cuarta edición)
Un lente convergente tiene una longitud focal de 40cm . Calcule el tamaño de la imagen real de un objeto a 4cm de altura para las siguientes distancias al objeto:
a) 50cm , b) 60cm , c) 80cm , d) 100cm e) 200cm , y f) ∞
- (Problema 33, capítulo 36, Física, Raymond A. Serway, V2, cuarta edición)
Un objeto se localiza 20cm a la izquierda de un lente divergente que tiene una longitud focal $f = -32\text{cm}$. Determine a) la localización, y b) el aumento de la imagen. c) Construya un diagrama de rayos para este arreglo.
- (Problema 57, capítulo 36, Física, Raymond A. Serway, V2, cuarta edición)
Un objeto de 2cm de altura se pone 40cm a la izquierda de un lente convergente que tiene una longitud focal de 30cm . Un lente divergente cuya longitud focal es de -20cm se coloca a 110cm a la derecha del lente convergente. a) Determine la posición final y el aumento de la imagen final. b) ¿La imagen está de pie o invertida? c) Repita a y b para el caso en que el segundo lente es convergente y tiene una longitud focal de 20cm .

Soluciones

Problema 1

Los datos que se tienen son $R = 40cm$, $s_{o1} = 30cm$ y $s_{o2} = 60cm$.

La ecuación que relaciona el radio con el foco para un espejo es (ver apéndice)

$$f = -\frac{R}{2}$$

Como se trata de un espejo convexo, entonces el radio esta a la derecha de la superficie, por lo tanto es positivo, con esto, el foco es

$$f = -20cm$$

Utilizando la ecuación para formación de imágenes, se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{1}{s_o} + \frac{1}{s_i} &= \frac{1}{f} \\ \frac{1}{s_i} &= \frac{1}{f} - \frac{1}{s_o} \\ \frac{1}{s_i} &= \frac{s_o - f}{f \cdot s_o} \\ \Rightarrow s_i &= \frac{f \cdot s_o}{s_o - f} \end{aligned}$$

Ahora, reemplazando los valores para las posiciones del objeto se tiene que

a)

$$\begin{aligned} s_{i1} &= \frac{f \cdot s_{o1}}{s_{o1} - f} \\ &= \frac{-20 \cdot 30}{30 - (-20)} \\ &= -\frac{600}{50} = -12cm \end{aligned}$$

con una magnificación $M_1 = -\frac{s_{i1}}{s_{o1}} = -\frac{-12}{30} = 0,4$ y

b)

$$\begin{aligned} s_{i2} &= \frac{f \cdot s_{o2}}{s_{o2} - f} \\ &= \frac{-20 \cdot 60}{60 - (-20)} \\ &= -\frac{1200}{80} = -15cm \end{aligned}$$

con una magnificación $M_1 = -\frac{s_{i1}}{s_{o1}} = -\frac{-15}{60} = 0,25$

De los signos de las magnificaciones podemos ver que son imágenes derechas, además por las posiciones vemos que son imágenes virtuales.

Problema 2

Como se trata de una lente biconvexa, entonces el radio de la primera cara es positivo y el de la segunda es negativo, por lo que se tiene que, utilizando la ecuación del constructor de lentes

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

reemplazando los valores se tiene que (considerando $n = 1,44$)

$$\begin{aligned} \frac{1}{f} &= (0,44) \left(\frac{1}{12} - \left(-\frac{1}{18} \right) \right) \\ &= (0,44) \frac{5}{36} \\ &= 0,06\bar{1} \\ \Rightarrow f &\approx 16,36cm \end{aligned}$$

Ahora, si cambiamos los radios de curvatura, entonces la ecuación se transforma en

$$\begin{aligned} \frac{1}{f} &= (0,44) \left(\frac{1}{18} - \left(-\frac{1}{12} \right) \right) \\ &= (0,44) \frac{5}{36} \\ &= 0,06\bar{1} \\ \Rightarrow f &\approx 16,36cm \end{aligned}$$

Es decir, la lente es simétrica y el foco no depende del lado de incidencia de la luz.

Problema 3

La ecuación para lentes es (ver apéndice)

$$\frac{1}{s_i} + \frac{1}{s_o} = \frac{1}{f}$$

La magnificación para una lente se obtiene como

$$M = -\frac{s_i}{s_o} = \frac{y_i}{y_o}$$

de modo que el tamaño de la imagen se puede obtener como

$$y_i = My_o$$

donde $M = -\frac{s_i}{s_o}$.

De esta forma, podemos obtener las posiciones de las imágenes como

$$\frac{1}{s_i} = \frac{1}{f} - \frac{1}{s_o}$$

$$s_i = \frac{f \cdot s_o}{s_o - f}$$

Utilizando ahora los valores se tiene que

a) *Distancia objeto* $s_o = 50\text{cm}$: Para esta distancia, la imagen esta en

$$s_i = \frac{f \cdot s_o}{s_o - f}$$

$$= \frac{40 \cdot 50}{50 - 40}$$

$$= \frac{2000}{10}$$

$$= 2m$$

la imagen esta a $2m$ de distancia, con esto, la magnificación es $M = -\frac{200}{50} = -4$, por lo que la altura de la imagen es $y_i = -4 * y_o = -16\text{cm}$. Así vemos que la imagen es aumentada e invertida

b) *Distancia objeto* $s_o = 60\text{cm}$: Usando el mismo procedimiento se tiene que

$$s_i = \frac{f \cdot s_o}{s_o - f}$$

$$= \frac{40 \cdot 60}{60 - 40}$$

$$= \frac{2400}{20}$$

$$= 1,2m$$

la imagen esta a $1,2m$ de distancia, con esto, la magnificación es $M = -\frac{120}{60} = -2$, por lo que la altura de la imagen es $y_i = -2 * y_o = -8\text{cm}$ y también es una imagen aumentada e invertida.

c) *Distancia objeto* $s_o = 80\text{cm}$: Nuevamente se tiene que

$$s_i = \frac{f \cdot s_o}{s_o - f}$$

$$= \frac{40 \cdot 80}{80 - 40}$$

$$= \frac{3200}{40}$$

$$= 80\text{cm}$$

la imagen esta a 80cm de distancia, la magnificación es $M = -\frac{80}{80} = -1$, por lo que la altura de la imagen es $y_i = -1 * y_o = -4\text{cm}$ por lo que es una imagen del mismo tamaño pero invertida.

d) *Distancia objeto* $s_o = 100\text{cm}$: Usando el mismo procedimiento se tiene que

$$s_i = \frac{f \cdot s_o}{s_o - f}$$

$$= \frac{40 \cdot 100}{100 - 40}$$

$$= \frac{4000}{60}$$

$$= \frac{400}{6} \approx 66,7\text{cm}$$

la imagen esta aproximadamente a $66,7\text{cm}$ de distancia, la magnificación es $M = -\frac{400}{6 \cdot 100} = -\frac{2}{3}$, por lo que la altura de la imagen es $y_i = -\frac{2}{3} * y_o \approx -2,67\text{cm}$, es una imagen disminuida e invertida.

e) *Distancia objeto* $s_o = 200\text{cm}$: Usando el mismo procedimiento se tiene que

$$s_i = \frac{f \cdot s_o}{s_o - f}$$

$$= \frac{40 \cdot 200}{200 - 40}$$

$$= \frac{8000}{160}$$

$$= 50\text{cm}$$

la imagen esta a 50cm de distancia, la magnificación es $M = -\frac{50}{200} = -\frac{1}{4}$, por lo que la altura de la imagen es $y_i = -\frac{1}{4} * y_o \approx -1\text{cm}$, es una imagen disminuida e invertida.

Finalmente se tiene el último caso

f) *Distancia objeto* $s_o = \infty$: Usando la ecuación de las lentes se tiene que

$$\frac{1}{s_o} + \frac{1}{s_i} = \frac{1}{f}$$

$$\frac{1}{\infty} + \frac{1}{s_i} = \frac{1}{f}$$

$$s_i = f = 40\text{cm}$$

la imagen esta se forma en el foco de la lente, por lo que la magnificación es $M = -\frac{40}{\infty} = 0$, por lo que la luz converge e un solo punto, el foco.

Problema 4

Utilizando la ecuación de las lentes y los valores del problema se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{1}{s_o} + \frac{1}{s_i} &= \frac{1}{f} \\ \frac{1}{20} + \frac{1}{s_i} &= -\frac{1}{32} \\ \frac{1}{s_i} &= -\frac{10}{320} - \frac{16}{320} \\ \frac{1}{s_i} &= -\frac{26}{320} \\ s_i &= -\frac{320}{26} = -12,31cm \end{aligned}$$

de modo que la imagen es virtual y tiene una magnificación de $M = -\frac{-12,31}{20} = 0,615$, por lo que la imagen es reducida y derecha.

El diagrama de rayos se muestra en la figura 1

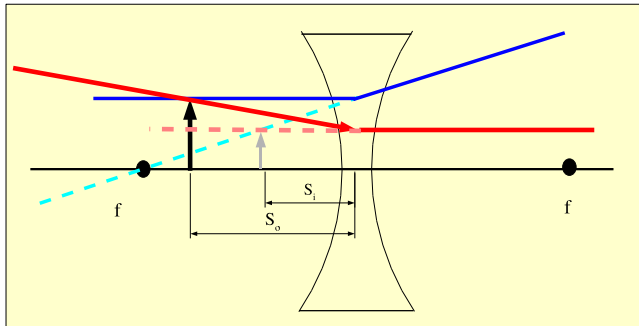


Figura 1: Diagrama de rayos para una lente divergente. El rayo rojo se dirige hacia el segundo foco y sale paralelo, la línea punteada de color salmón es la proyección de este haz. La línea azul incide paralela al eje óptico y sale por el primer foco, la línea calipso es la proyección de esta línea. Ambas proyecciones se interceptan en el punto de formación de la imagen.

Problema 5

En este caso, primero calculamos la imagen producida por la lente convergente, la cual nos servirá como objeto para la segunda lente.

Utilizando la ecuación de las lentes y los datos del problema, para la primera lente se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{1}{s_{o1}} + \frac{1}{s_{i1}} &= \frac{1}{f_1} \\ \frac{1}{40} + \frac{1}{s_i} &= \frac{1}{30} \\ s_{i1} &= \frac{30 \cdot 40}{40 - 30} = 120cm \end{aligned}$$

Ahora, la lente divergente esta a 110cm de la lente convergente, de modo que la imagen que forma la primera

lente es virtual para la segunda. La distancia objeto 2 para la segunda lente es $s_{o2} = -10cm$ ya que el objeto esta a la derecha de la lente. Usando estos datos se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{1}{s_{o2}} + \frac{1}{s_{i2}} &= \frac{1}{f_2} \\ \frac{1}{-10} + \frac{1}{s_{i2}} &= \frac{1}{-20} \\ \frac{1}{s_{i2}} &= \frac{1}{-20} - \frac{2}{-20} \\ \frac{1}{s_{i2}} &= \frac{2}{20} - \frac{1}{20} \\ \frac{1}{s_{i2}} &= \frac{1}{20} \Rightarrow s_{i2} = 20cm \end{aligned}$$

De este modo vemos que la imagen final es invertida y real.

La magnificación total es el producto de las magnificaciones, de modo que calculemos estas magnificaciones individualmente. Para la primera lente se tiene que

$$M_1 = -\frac{s_{i1}}{s_{o1}} = -\frac{120}{40} = -3$$

Para la segunda lente se tiene que

$$M_2 = -\frac{s_{i2}}{s_{o2}} = -\frac{20}{-10} = 2$$

Así, la magnificación total será

$$M_T = M_1 \cdot M_2 = 2 \cdot (-3) = -6$$

Es decir, el objeto es amplificado 6 veces y la imagen es invertida a la original.

El esquema de esta situación se muestra en la figura 2

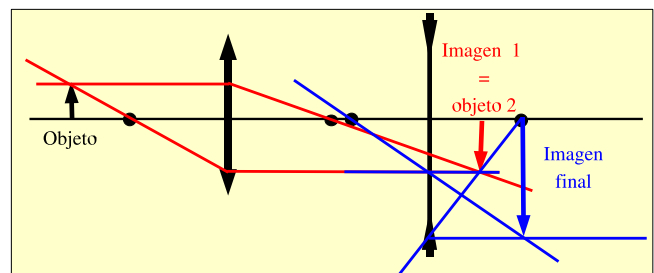


Figura 2: Combinación de lentes, Lente convergente y lente divergente.

Realicemos ahora el cálculo para el caso en que la segunda lente es una lente convergente con distancia focal $f_2 = 20cm$. En este caso aun es valido el primer

calculo, por lo que se tiene que $s_{o1} = 40cm$, $s_{i1} = 120cm$ y $s_{o2} = -10cm$. Utilizando la ecuación de las lentes nuevamente se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{1}{s_{o2}} + \frac{1}{s'_{i2}} &= \frac{1}{f'_2} \\ \frac{1}{-10} + \frac{1}{s'_{i2}} &= \frac{1}{20} \\ \frac{1}{s'_{i2}} &= \frac{1}{20} - \frac{2}{20} \\ \frac{1}{s'_{i2}} &= \frac{3}{20} \Rightarrow s'_{i2} = 6.\bar{6}cm \end{aligned}$$

Así vemos que la imagen también es real. La magnificación para la segunda lente sera entonces

$$M'_2 = -\frac{s'_{i2}}{s_{o2}} = -\frac{6.\bar{6}cm}{-10} = 0.\bar{6}cm$$

vemos que la segunda imagen es reducida con respecto al segundo objeto, sin embargo la magnificación total será

$$M'_T = M_1 \cdot M'_2 = -3 \cdot \frac{2}{3} = -2$$

de modo que la imagen final tiene el doble de tamaño y también es invertida y real con respecto al original. El esquema de esta situación se muestra en la figura 3

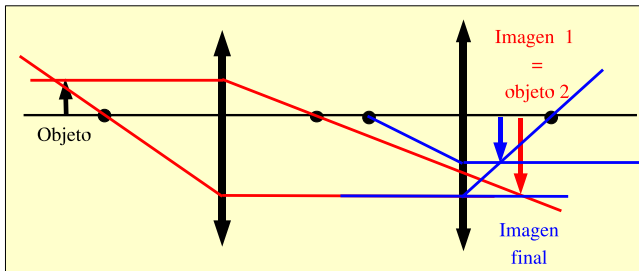


Figura 3: Combinación de dos lentes convergentes.

Apéndice

Cuadro 1: Formulas mas utilizadas

Índice de refracción	$n = \frac{c}{v}$	c : velocidad de la luz en el vacío v : Velocidad de la luz en el medio óptico.
Ley de reflexión	$\theta'_1 = \theta_1$	θ'_1 : Ángulo formado entre la normal a la superficie y el haz reflejado θ_1 : Ángulo formado por el haz incidente y la normal a la superficie
Ley de Snell	$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$	n_i : índice de refracción del medio i de propagación θ_1 : Ángulo formado por el haz incidente y la normal a la superficie 1 θ_2 : Ángulo formado por el haz propagado y la normal a la superficie 2
Ángulo crítico para reflexión total interna	$\sin \theta_C = \frac{n_1}{n_2}$	n_i : índice de refracción del medio i de propagación θ_C : Ángulo crítico de reflexión total interna
Intensidad de la luz reflejada (solo para incidencia normal)	$I = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2 I_0$	n_i : Índice de refracción del medio i de propagación I_0 : Intensidad de la luz incidente
$\sin(\alpha \pm \beta)$	$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$	α, β : ángulos cualquiera
Fórmula de los espejos	$\frac{1}{s_o} + \frac{1}{s_i} = -\frac{2}{R}$	s_o : distancia espejo-objeto s_i : distancia espejo-imagen R : Radio De la superficie esférica
Relación Foco-Radio para espejos	$f = -\frac{R}{2}$	f : Foco del espejo R : Radio de la superficie esférica ($R > 0$ para espejos convexos y $R < 0$ para espejos cóncavos)
Ecuación del constructor de lentes	$\frac{1}{f} = (n - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$	f : Foco del lente R_1 : Radio de la primera superficie R_2 : Radio de la segunda superficie
Magnificación transversal	$M = -\frac{s_i}{s_o} = \frac{y_i}{y_o}$	s_i : Distancia imagen s_o : Distancia objeto y_i : Altura imagen y_o : Altura Objeto

Cuadro 2: Imágenes de objetos reales formadas por espejos esféricos

Cóncavo				
Objeto	Imagen			
Posición	Tipo	Posición	Orientación	Tamaño relativo
$\infty > s_o > 2f$	Real	$f < s_i < 2f$	Invertida	Disminuida
$s_o = 2f$	Real	$s_i = 2f$	Invertida	Mismo tamaño
$f < s_o < 2f$	Real	$\infty > s_i > 2f$	Invertida	Aumentada
$s_o = f$		$\pm\infty$		
$s_o < f$	Virtual	$ s_i > s_o$	Derecha	Aumentada
Convexo				
Objeto	Imagen			
Posición	Tipo	Posición	Orientación	Tamaño relativo
Cualquier lugar	Virtual	$ s_i < f $, $s_o > s_i $	Derecha	Disminuida

Cuadro 3: Convenio de signos para espejos esféricos(V, punto sobre la superficie del espejo, C centro de curvatura)

Cantidad	Signo	
	+	-
s_o	A la izquierda de V, objeto real	A la derecha de V, Objeto virtual
s_i	A la izquierda de V, imagen real	A la derecha de V, imagen virtual
f	Espejo cóncavo	Espejo convexo
R	C a la derecha de V, Convexo	C a la izquierda de V, Cóncavo
y_o	Por encima del eje, objeto derecho	Por debajo del eje, objeto invertido
y_i	Por encima del eje, imagen derecha	Por debajo del eje, imagen invertida

Cuadro 4: Imágenes de objetos reales formadas por lentes delgadas

Convexa				
Objeto	Imagen			
Posición	Clase	Posición	Orientación	Tamaño relativo
$\infty > s_o > 2f$	Real	$f < s_i < 2f$	Invertida	Disminuida
$s_o = 2f$	Real	$s_i = 2f$	Invertida	Mismo tamaño
$f < s_o < 2f$	Real	$\infty > s_i > 2f$	Invertida	Aumentada
$s_o = f$		$\pm\infty$		
$s_o < f$	Virtual	$ s_i > s_o$	Derecha	Aumentada
Cóncava				
Objeto	Imagen			
Posición	Tipo	Posición	Orientación	Tamaño relativo
Cualquier lugar	Virtual	$ s_i < f $, $s_o > s_i $	Derecha	Disminuida

Cuadro 5: Significado asociado con los signos de varios parámetros para lentes delgadas e interfaces esféricas

Cantidad	Signo	
	+	-
s_o	Objeto real	Objeto virtual
s_i	Imagen real	Imagen virtual
f	Lente convergente	Lente divergente
y_o	Objeto derecho	Objeto invertido
y_i	Imagen derecha	Imagen invertida
M_T	Imagen derecha	Imagen invertida
R_1, R_2	Centro de curvatura detrás de la lente	Centro de curvatura delante de la lente