

Seminario 3: Lentes, espejos y formación de imágenes

Fabián Andrés Torres Ruiz*

* Departamento de Física, Universidad de Concepción, Chile

4 de Abril de 2007.

Problemas

1. (Problema 18, capítulo 35, Física, Raymond A. Serway, V2, cuarta edición)
las superficies reflejantes de dos espejos planos que se intersectan en un ángulo de θ ($0^\circ < \theta < 90^\circ$), como en la figura 1. Si un rayo luminoso incide sobre el espejo horizontal, muestre que el rayo emergente intersectará al rayo incidente en un ángulo de $\beta = 180^\circ - 2\theta$.

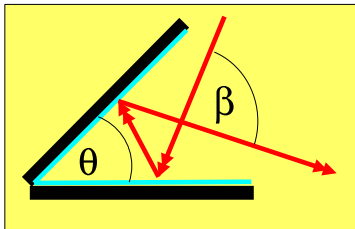


Figura 1: Problema 1, espejos planos formando un ángulo θ

2. (Problema 48, capítulo 35, Física, Raymond A. Serway, V2, cuarta edición)
El ángulo entre los espejos de la figura 2 es recto. El haz de luz en el plano vertical P incide sobre el espejo 1, como se indica. a) Determine la distancia que el haz luminoso reflejado viaja antes de llegar al espejo 2. b) ¿En qué dirección el haz de luz viaja después de reflejarse en el espejo 2?
3. (Problema 3, capítulo 36, Física, Raymond A. Serway, V2, cuarta edición)
Determinar la altura mínima de un espejo plano vertical en el cual una persona de $1,70m$ podría ver su imagen completa.
4. (Problema 5, capítulo 36, Física, Raymond A. Serway, V2, cuarta edición)
Un espejo cóncavo tiene una longitud focal de $40cm$. Determinar la posición del objeto para la cual la imagen resultante está de pie y es cuatro veces el tamaño del objeto.
5. (Problema 7, capítulo 36, Física, Raymond A. Serway, V2, cuarta edición)

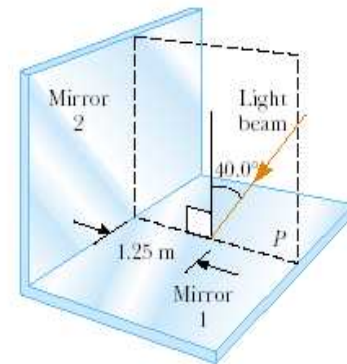


Figura 2: Problema 1, espejos planos formando un ángulo 90°

Un espejo cóncavo tiene un radio de curvatura de $60cm$. Calcule la posición de la imagen y el aumento de un objeto colocado enfrente del espejo distancias de a) $90cm$ y b) $20cm$. Dibuje diagramas de rayos para obtener la imagen en cada caso.

6. (Problema 10, capítulo 36, Física, Raymond A. Serway, V2, cuarta edición)
Una vela está a $49cm$ frente a un espejo esférico convexo que tiene un radio de curvatura de $70cm$. a) ¿Dónde está la imagen? b) ¿Cuál es el aumento?.
7. (Problema 15, capítulo 36, Física, Raymond A. Serway, V2, cuarta edición)
Un espejo convexo esférico tiene un radio de $40cm$. Determine la posición de la imagen virtual y el aumento para distancias al objeto de a) $30cm$ y b) $60cm$. c) ¿Las imágenes están de pie o invertidas?
8. Estudio del Microscopio

Soluciones

Problema 1

Si utilizamos la división natural producida por el haz reflejado entre ambas caras, entonces podemos escribir dos triángulos. Del primer triángulo se obtienen las siguientes relaciones

$$\theta + \delta + \lambda = 180 \quad (1)$$

$$\delta + \alpha = 90 \quad (2)$$

$$\lambda + \gamma = 90 \quad (3)$$

reemplazando las dos ultimas expresiones en la primera, se tiene que

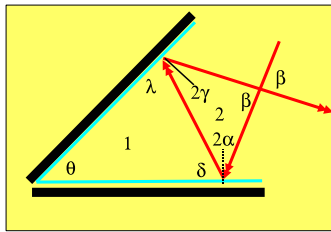


Figura 3: relación entre ángulos

$$\theta + (90 - \alpha) + (90 - \gamma) = 180 \quad (4)$$

$$\theta = \alpha + \gamma. \quad (5)$$

Utilizando el segundo triángulo se tiene que

$$\beta + 2\alpha + 2\gamma = 180 \quad (6)$$

$$\beta + 2(\alpha + \gamma) = 180 \quad (7)$$

reemplazando la ecuación 5 en la expresión anterior se obtiene finalmente

$$\beta + 2(\alpha + \gamma) = 180$$

$$\beta = 180 - 2(\alpha + \gamma)$$

Problema 2

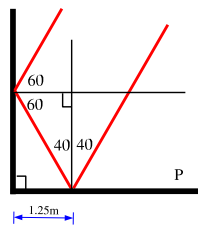


Figura 4: Ángulos producto de las reflexiones

De la figura, sabemos que la distancia que recorre la luz antes de llegar al espejo 2 es al hipotenusa del

triángulo, de modo que, usando la definición de $\sin \theta$ se tiene que

$$\sin \theta = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Hipotenusa}} \quad (8)$$

$$\sin 40 = \frac{1,25}{H} \Rightarrow H = \frac{1,25}{\sin 40} \approx 1,94m \quad (9)$$

De la misma geometría vemos que el haz saliente es paralelo al haz incidente. Esto también se puede observar del resultado del ejercicio 1, en donde reemplazando $\theta = 90^\circ$ se obtiene un ángulo de intersección de 0° .

Problema 3

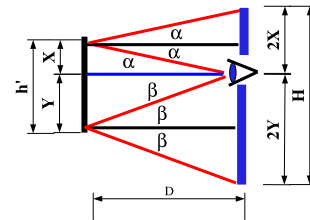


Figura 5: Reflexiones en el espejo plano

De la figura, sabemos que la tangente de un ángulo está definida como el cociente entre el cateto opuesto y el cateto adyacente, de este modo vemos que la tangente de los ángulos α y β son

$$\tan \alpha = \frac{X}{D}, \quad \tan \beta = \frac{Y}{D}$$

De modo tal que la altura del espejo es $h' = X + Y$, mientras que la de la persona es $H = 2X + 2Y = 2(X + Y) = 2h'$, de modo que es claro que se necesita un espejo de $\frac{H}{2}$ para ver la imagen de cuerpo completo, por lo que, para una persona de $1,70m$ se necesita un espejo de $85cm$.

Problema 4

Las distancias deben satisfacer que

$$M = 4 = -\frac{s_i}{s_o} \Rightarrow s_i = -4s_o \quad (10)$$

De la ecuación para formación de imágenes se tiene que

$$\frac{1}{s_o} + \frac{1}{s_i} = \frac{1}{f} \quad (11)$$

Reemplazando 10 se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{1}{s_o} - \frac{1}{4s_o} &= \frac{1}{f} \\ \frac{4}{4s_o} - \frac{1}{4s_o} &= \frac{1}{f} \\ \frac{3}{4s_o} &= \frac{1}{f} \\ 4s_o &= 3f \\ s_o &= \frac{3}{4}f\end{aligned}$$

con lo que se obtiene que el objeto debe estar colocado a $30cm$ del espejo.

Problema 5

El radio de curvatura es de $60cm$ y como se trata de un espejo cóncavo, entonces el radio es negativo por lo que, utilizando la relación radio-foco para espejos se tiene que

$$f = -\frac{R}{2} = 30cm$$

con esto, ahora podemos utilizar la fórmula para espejos para calcular la posición de las imágenes.

Para el objeto colocado a

a) $90cm$: Se tiene que la imagen estará en

$$\begin{aligned}\frac{1}{s_o} + \frac{1}{s_i} &= \frac{1}{f} \\ \frac{1}{90} + \frac{1}{s_i} &= \frac{1}{30} \\ \frac{1}{s_i} &= \frac{3}{90} - \frac{1}{90} \\ \frac{1}{s_i} &= \frac{1}{45} \Rightarrow s_i = 45cm\end{aligned}$$

b) $20cm$: Se tiene que la imagen estará en

$$\begin{aligned}\frac{1}{s_o} + \frac{1}{s_i} &= \frac{1}{f} \\ \frac{1}{20} + \frac{1}{s_i} &= \frac{1}{30} \\ \frac{1}{s_i} &= \frac{2}{60} - \frac{3}{60} \\ \frac{1}{s_i} &= -\frac{1}{60} \Rightarrow s_i = -60cm\end{aligned}$$

Problema 6

El microscopio es una combinación de dos lentes, el *objetivo* que es una lente con distancia focal f_o muy pequeña (menos a $1cm$) y un lente *ocular* que tiene una longitud focal f mayor (unos cuantos centímetros). La

distancia de separación entre las lentes es L , tal que L es mucho mas grande que f_o o f .

El objetivo forma una imagen invertida real del objeto que se quiere observar. Esta imagen queda muy cerca del punto focal (o en el punto focal) del ocular. La imagen aumentada por el ocular es invertida y virtual.

La magnificación del objetivo esta dada por

$$M_o = -\frac{s_i}{s_o}$$

pero, $s_o \approx f_o$ y $s_i \approx L$, de modo que se obtiene que

$$M_o \approx -\frac{L}{f_o}$$

Ahora, la formula para el aumento simple consiste en que el ojo humano posee una distancia focal del orden de los $25cm$, por lo que el aumento angular, que es la razón entre el ángulo subtendido por un objeto con una lente en uso (θ) y el subtendido por el objeto sin la lente (θ_o), esta dado por

$$m \equiv \frac{\theta}{\theta_o}$$

Como dijimos esta es máxima cuando $s_i \approx 25cm$, por lo que la distancia a la que se debe colocar un objeto utilizando una lente es

$$\frac{1}{s_o} + \frac{1}{-25} = \frac{1}{f} \quad (12)$$

$$\Rightarrow s_o = \frac{25f}{25 + f} \quad (13)$$

Para ángulos pequeños se tiene que $\theta_o \approx \frac{h}{25}$ y $\theta \approx \frac{h}{s_o}$ por lo que se obtiene que

$$m = 1 + \frac{25}{f} \quad (14)$$

La posición mas cómoda para la observación del ojo es cuando se enfoca hacia el infinito, por lo que se tiene entonces que el objeto está en el punto focal de la lente, de modo que $\theta_o \approx \frac{h}{25}$ y $\theta \approx \frac{h}{f}$ de modo que el aumento es

$$m = \frac{\theta}{\theta_o} = \frac{25}{f}$$

De esta forma, para el microscopio, el aumento del objetivo, enfocando el ojo al infinito es

$$m_{ocular} = \frac{25}{f}$$

De modo que el aumento total del microscopio
esta dado por

$$m = m_o \cdot m_{ocular} = -\frac{L}{f_o} \frac{25}{f}$$

Apéndice

Cuadro 1: Formulas mas utilizadas

Índice de refracción	$n = \frac{c}{v}$	c : velocidad de la luz en el vacío v : Velocidad de la luz en el medio óptico.
Ley de reflexión	$\theta'_1 = \theta_1$	θ'_1 : Ángulo formado entre la normal a la superficie y el haz reflejado θ_1 : Ángulo formado por el haz incidente y la normal a la superficie
Ley de Snell	$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$	n_i : índice de refracción del medio i de propagación θ_1 : Ángulo formado por el haz incidente y la normal a la superficie 1 θ_2 : Ángulo formado por el haz propagado y la normal a la superficie 2
Ángulo crítico para reflexión total interna	$\sin \theta_C = \frac{n_1}{n_2}$	n_i : índice de refracción del medio i de propagación θ_C : Ángulo crítico de reflexión total interna
Intensidad de la luz reflejada (solo para incidencia normal)	$I = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2 I_0$	n_i : Índice de refracción del medio i de propagación I_0 : Intensidad de la luz incidente
$\sin(\alpha \pm \beta)$	$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$	α, β : ángulos cualquiera
Fórmula de los espejos	$\frac{1}{s_o} + \frac{1}{s_i} = -\frac{2}{R}$	s_o : distancia espejo-objeto s_i : distancia espejo-imagen R : Radio De la superficie esférica
Relación Foco-Radio para espejos	$f = -\frac{R}{2}$	f : Foco del espejo R : Radio de la superficie esférica ($R > 0$ para espejos convexos y $R < 0$ para espejos cóncavos)
Ecuación del constructor de lentes	$\frac{1}{f} = (n - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$	f : Foco del lente R_1 : Radio de la primera superficie R_2 : Radio de la segunda superficie

Cuadro 2: Imágenes de objetos reales formadas por espejos esféricos

Cóncavo				
Objeto	Imagen			
Posición	Tipo	Posición	Orientación	Tamaño relativo
$\infty > s_o > 2f$	Real	$f < s_i < 2f$	Invertida	Disminuida
$s_o = 2f$	Real	$s_i = 2f$	Invertida	Mismo tamaño
$f < s_o < 2f$	Real	$\infty > s_i > 2f$	Invertida	Aumentada
$s_o = f$		$\pm\infty$		
$s_o < f$	Virtual	$ s_i > s_o$	Derecha	Aumentada
Convexo				
Objeto	Imagen			
Posición	Tipo	Posición	Orientación	Tamaño relativo
Cualquier lugar	Virtual	$ s_i < f $, $s_o > s_i $	Derecha	Disminuida

Cuadro 3: Convenio de signos para espejos esféricos(V, punto sobre la superficie del espejo, C centro de curvatura)

Cantidad	Signo	
	+	-
s_o	A la izquierda de V, objeto real	A la derecha de V, Objeto virtual
s_i	A la izquierda de V, imagen real	A la derecha de V, imagen virtual
f	Espejo cóncavo	Espejo convexo
R	C a la derecha de V, Convexo	C a la izquierda de V, Cóncavo
y_o	Por encima del eje, objeto derecho	Por debajo del eje, objeto invertido
y_i	Por encima del eje, imagen derecha	Por debajo del eje, imagen invertida

Cuadro 4: Imágenes de objetos reales formadas por lentes delgadas

Convexa				
Objeto	Imagen			
Posición	Clase	Posición	Orientación	Tamaño relativo
$\infty > s_o > 2f$	Real	$f < s_i < 2f$	Invertida	Disminuida
$s_o = 2f$	Real	$s_i = 2f$	Invertida	Mismo tamaño
$f < s_o < 2f$	Real	$\infty > s_i > 2f$	Invertida	Aumentada
$s_o = f$		$\pm\infty$		
$s_o < f$	Virtual	$ s_i > s_o$	Derecha	Aumentada
Cóncava				
Objeto	Imagen			
Posición	Tipo	Posición	Orientación	Tamaño relativo
Cualquier lugar	Virtual	$ s_i < f $, $s_o > s_i $	Derecha	Disminuida

Cuadro 5: Significado asociado con los signos de varios parámetros para lentes delgadas e interfaces esféricas

Cantidad	Signo	
	+	−
s_o	Objeto real	Objeto virtual
s_i	Imagen real	Imagen virtual
f	Lente convergente	Lente divergente
y_o	Objeto derecho	Objeto invertido
y_i	Imagen derecha	Imagen invertida
M_T	Imagen derecha	Imagen invertida
R_1, R_2	Centro de curvatura detrás de la lente	Centro de curvatura delante de la lente