Seminario 2: Prismas

Fabián Andrés Torres Ruiz[*]
[*] Departamento de Física, Universidad de Concepción, Chile

28 de Marzo de 2007.

Problemas

1. (Pagina 192, Óptica, Eugene Hecht,tercera edición)
   Deducción del ángulo de desviación para un prisma dispersivo.

2. (Problema 46A, capitulo 35,Física, Raymond A. Serway, V2, cuarta edición)
   Un material que tiene un índice de refracción n está rodeado por el vacío ($n = 1$) y tiene la forma de un cuarto de circulo de radio R. Un rayo luminoso paralelo a la base del material incide desde la izquierda a una distancia L sobre la base y emerge del material a un ángulo θ. Determine una expresión para θ en función de L, n y R.

Soluciones

Problema 1

En este caso, utilizando la figura 1 se tiene que

$$\begin{aligned} \delta &= (\theta_{i1} - \theta_{t1}) + (\theta_{t_2} - \theta_{i2}) && (1) \\ \alpha &= \theta_{t1} + \theta_{i2} && (2) \end{aligned}$$

Utilizando estas dos ecuaciones, se tiene que

$$\begin{aligned} \delta &= \theta_{i1} + \theta_{t_2} - \alpha && (3) \\ \theta_{i2} &= \alpha - \theta_{t1} && (4) \end{aligned}$$

Utilizando la ley de Snell en la segunda transmisión se tiene que

$$\begin{aligned} n_p \sin\theta_{i2} &= n \sin\theta_{t2} && (5) \\ \theta_{t2} &= \arcsin\left(\frac{n_p}{n}\sin\theta_{i2}\right) && (6) \end{aligned}$$

utilizando la ecuación 4 se tiene que

$$\theta_{t2} = \arcsin\left(\frac{n_p}{n}\sin(\alpha - \theta_{t1})\right) \qquad (7)$$

Utilizando la identidad trigonométrica para el seno de la suma o resta de ángulos (ver apéndice) se tiene que

$$\begin{aligned} \theta_{t2} &= \arcsin\left(\frac{n_p}{n}\sin(\alpha - \theta_{t1})\right) && (8) \\ &= \arcsin\left(\frac{n_p}{n}\sin\alpha\cos\theta_{t1} - \frac{n_p}{n}\cos\alpha\sin\theta_{t1}\right) && (9) \\ &= \arcsin\left(\frac{n_p}{n}\sin\alpha\sqrt{1-\sin^2\theta_{t1}} - \frac{n_p}{n}\cos\alpha\sin\theta_{t1}\right) && (10) \end{aligned}$$

Usando la ley de Snell en la primera interfase se tiene que

$$\begin{aligned} n\sin\theta_{i1} &= n_p \sin\theta_{t1} && (11) \\ \sin^2\theta_{t1} &= \frac{n^2}{n_p^2}\sin^2\theta_{i1} && (12) \end{aligned}$$

reemplazando en 10 se tiene que

$$\begin{aligned} \theta_{t2} &= \arcsin\left(\frac{n_p}{n}\sin\alpha\sqrt{1 - \frac{n^2}{n_p^2}\sin^2\theta_{i1}} - \frac{n_p}{n}\cos\alpha\sin\theta_{t1}\right) && (13) \\ &= \arcsin\left(\frac{n_p}{n}\sin\alpha\frac{n}{n_p}\sqrt{\frac{n_p^2}{n^2} - \sin^2\theta_{i1}} - \frac{n_p}{n}\cos\alpha\frac{n}{n_p}\sin\theta_{i1}\right) && (14) \\ &= \arcsin\left(\sin\alpha\sqrt{\frac{n_p^2}{n^2} - \sin^2\theta_{i1}} - \sin\theta_{i1}\cos\alpha\right) && (15) \end{aligned}$$

Así, utilizando la relación 1 se obtiene que la desviación del haz es

$$\begin{aligned} \delta &= (\theta_{i1} - \theta_{t1}) + (\theta_{t_2} - \theta_{i2}) && (16) \\ &= \theta_{i1} + \arcsin\left(\sin\alpha\sqrt{\frac{n_p^2}{n^2} - \sin^2\theta_{i1}} - \sin\theta_{i1}\cos\alpha\right) - \alpha && (17) \end{aligned}$$

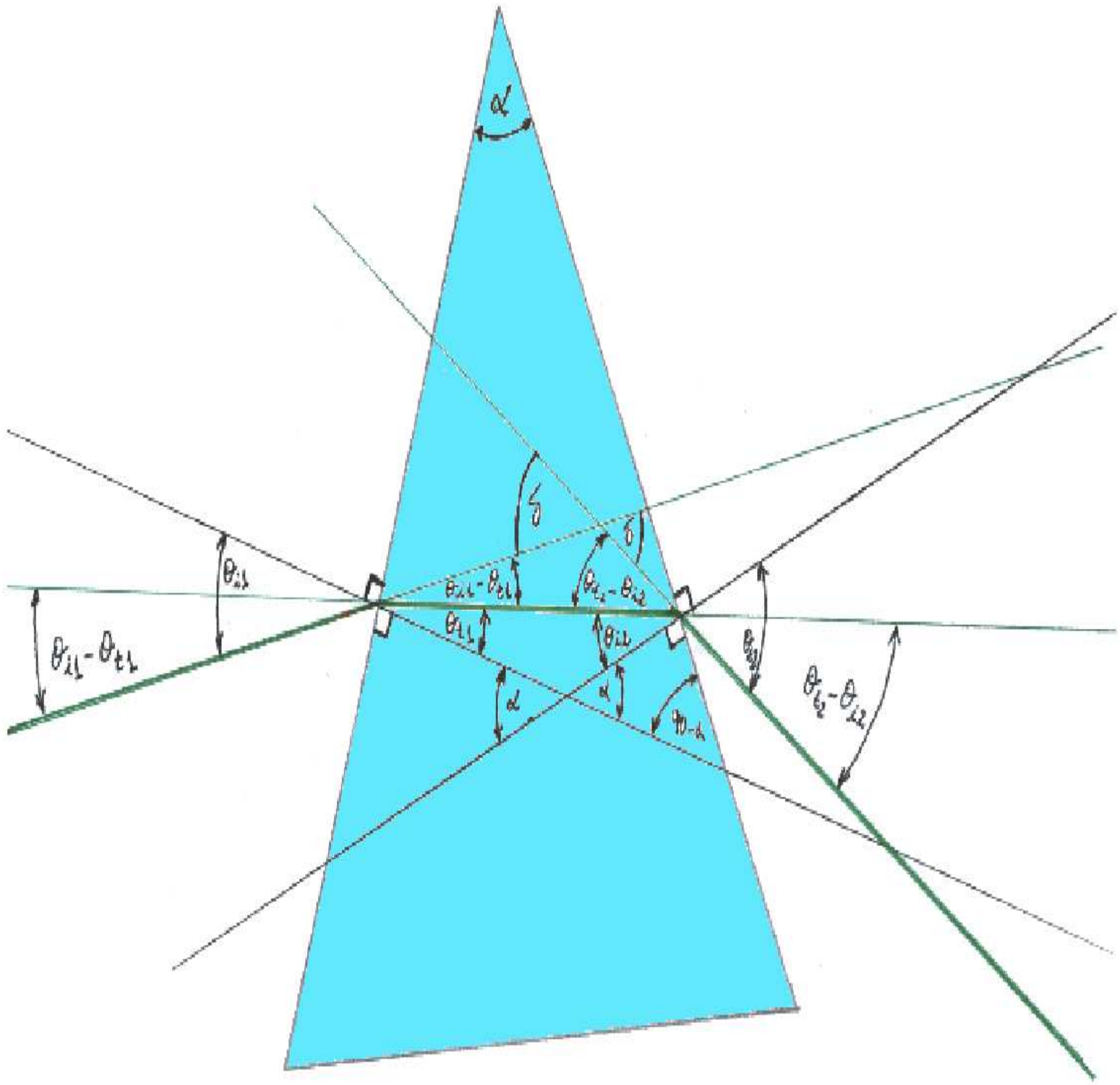

Figura 1: haces y lineas principales en un prisma dispersivo

Para buscar el *ángulo de desviación mínimo* es necesario derivar la expresión de la desviación angular 17, en función del ángulo de incidencia e igualarla a cero. Sin embargo se puede obtener el mismo resultado, derivando la expresión 3, de donde se obtiene que

$$
\begin{aligned}
1 + \frac{d\theta_{t2}}{d\theta_{i1}} &= 0 \qquad (18)\\
\frac{d\theta_{t2}}{d\theta_{i1}} &= -1 \qquad (19)
\end{aligned}
$$

La derivada de la ley de Snell en cada interfase es

$$
\begin{aligned}
n \cos\theta_{i1} d\theta_{i1} &= n_p \cos\theta_{t1} d\theta_{t1}\\
n_p \cos\theta_{i2} d\theta_{i2} &= n \cos\theta_{t2} d\theta_{t2}
\end{aligned}
$$

De la expresión 2, al derivarla se obtiene que

$$d\theta_{t1} = -d\theta_{i2}$$

De las ecuaciones 20 y 20 se obtiene que

$$\begin{aligned}
\frac{n\cos\theta_{i1}d\theta_{i1}}{n\cos\theta_{t2}d\theta_{t2}} &= \frac{n_p\cos\theta_{t1}d\theta_{t1}}{n_p\cos\theta_{i2}d\theta_{i2}} \\
\frac{d\theta_{i1}}{d\theta_{t2}}\frac{n\cos\theta_{i1}}{n\cos\theta_{t2}} &= \frac{d\theta_{t1}}{d\theta_{i2}}\frac{n_p\cos\theta_{t1}}{n_p\cos\theta_{i2}} \\
\frac{\cos\theta_{i1}}{\cos\theta_{t2}} &= \frac{\cos\theta_{t1}}{\cos\theta_{i2}}
\end{aligned}$$

Utilizando la ley de Snell se tiene que

$$\frac{1-\sin^2\theta_{i1}}{1-\sin^2\theta_{t2}} = \frac{1-\sin^2\theta_{t1}}{1-\sin^2\theta_{i2}} \tag{20}$$

pero $\sin\theta_{t1} = \dfrac{n\sin\theta_{i1}}{n_p}$ y $\sin\theta_{i2} = \dfrac{n\sin\theta_{t2}}{n_p}$. Reemplazando esto se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{1-\sin^2\theta_{i1}}{1-\sin^2\theta_{t2}} &= \frac{1-\frac{n\sin\theta_{i1}}{n_p}}{1-\frac{n\sin\theta_{t2}}{n_p}} \\
\frac{1-\sin^2\theta_{i1}}{1-\sin^2\theta_{t2}} &= \frac{n_p - n\sin\theta_{i1}}{n_p - n\sin\theta_{t2}}
\end{aligned}$$

De aquí se ve que la condición para la mínima desviación es que

$$\theta_{t1} = \theta_{i2}$$

Utilizando este resultado, vemos que cuando $\delta_{i1} = \delta_{min}$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\theta_{t1} &= \frac{\alpha}{2} \\
\delta_{min} &= 2\theta_{i1} - \alpha \\
\theta_{i1} &= \frac{\delta_{min}+\alpha}{2}
\end{aligned}$$

de donde se tiene que, usando la ley de Snell

$$\begin{aligned}
n\sin\theta_{i1} &= n_p\sin\theta_{t1} \\
n_p &= n\frac{\sin\left(\frac{\delta_{min}+\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}
\end{aligned}$$

Problema 2

Lo primero que debemos hacer es identificar las componentes normales y establecer las relaciones trigonométricas que nos puedan ser útiles.

Como se trata de un cuarto de circulo, la normal a la superficie circular siempre coincide con la linea del radio, de este modo podemos identificar que, el ángulo de incidencia, θ_i corresponde al ángulo que forma el radio con respecto a la superficie horizontal (ver figura 2)

De la trigonometría, sabemos que

$$\sin\theta_i = \frac{L}{R} \tag{21}$$

$$\sin^2\theta_i + \cos^2\theta_i = 1 \Rightarrow \qquad \cos\theta_i = \sqrt{1-\frac{L^2}{R^2}} \tag{22}$$

$$\tag{23}$$

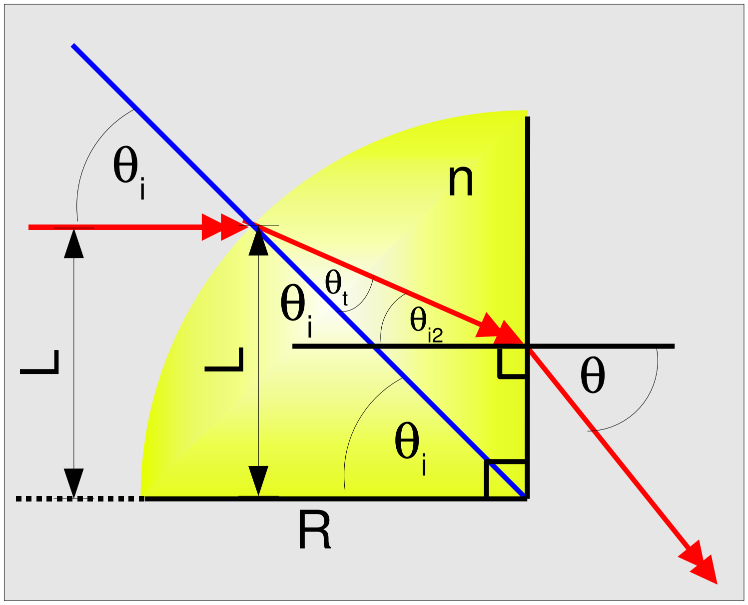

Figura 2:

Por otro lado, de la *Ley de Snell* sabemos que

$$\sin\theta_i = n\sin\theta_{t1} \Rightarrow \sin\theta_{t1} = \frac{L}{nR} \tag{24}$$

$$\cos\theta_{t1} = \sqrt{1 - \frac{\sin^2\theta_i}{n^2}} = \sqrt{1 - \frac{L^2}{n^2R^2}} \tag{25}$$

De la geometría sabemos que

$$\theta_{t1} + \theta_{i2} = \theta_i \tag{26}$$

ya que la suma de los ángulos interiores debe ser igual al ángulo exterior.

Escribiendo la ley de Snell para la segunda interfase, se tiene que

$$n\sin\theta_{i2} = \sin\theta_t \tag{27}$$

Despejando θ_{i2} de la ecuación 26, la ecuación 27 se escribe como

$$n\sin(\theta_i - \theta_{t1}) = \sin\theta_t$$

Utilizando la identidad trigonométrica para $\sin(\alpha+\beta)$ (ver apéndice) se tiene que

$$n(\sin\theta_i\cos\theta_{t1} - \sin\theta_{t1}\cos\theta_i) = \sin\theta_t$$

Reemplazando ahora las expresiones 21,22, 24 y 25 en 28, se tiene que

$$\sin\theta_t = n\left(\frac{L}{R}\sqrt{1-\frac{L^2}{n^2R^2}} - \frac{L}{nR}\sqrt{1-\frac{L^2}{R^2}}\right) \tag{28}$$

$$= \frac{nL}{R}\left(\frac{1}{n}\sqrt{n^2-\frac{L^2}{R^2}} - \frac{1}{n}\sqrt{1-\frac{L^2}{R^2}}\right) \tag{29}$$

$$= \frac{L}{R}\left(\sqrt{n^2-\frac{L^2}{R^2}} - \sqrt{1-\frac{L^2}{R^2}}\right) \tag{30}$$

Luego, el ángulo de salida es

$$\theta_t = \arcsin\left[\frac{L}{R}\left(\sqrt{n^2 - \frac{L^2}{R^2}} - \sqrt{1 - \frac{L^2}{R^2}}\right)\right]$$

Apéndice

Formulas mas utilizadas

Índice de refracción	$n = \frac{c}{v}$	c: velocidad de la luz en el vacío v: Velocidad de la luz en el medio óptico.
Ley de reflexión	$\theta_1' = \theta_1$	θ_1': Ángulo formado entre la normal a la s el haz reflejado θ_1: Ángulo formado por el haz incidente y a la superficie
Ley de Snell	$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$	n_i: índice de refracción del medio i de pro θ_1: Ángulo formado por el haz incidente y a la superficie 1 θ_2: Ángulo formado por el haz propagado y a la superficie 2
Ángulo crítico para reflexión total interna	$\sin\theta_C = \frac{n_1}{n_2}$	n_i: índice de refracción del medio i de pro θ_C: Ángulo crítico de reflexión total inter
Intensidad de la luz reflejada (solo para incidencia normal)	$I = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right)^2 I_0$	n_i: Índice de refracción del medio i de pro I_0: Intensidad de la luz incidente
$\sin(\alpha \pm \beta)$	$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$	α, β: ángulos cualquiera