



Tópico 2: Cuarto Resumen.

por

Fabián A. Torres R.

Informe Semanal

Departamento de Física

Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Universidad de Concepción
Av. Esteban Iturra s/n, Ciudad Universitaria
Casilla 160-C, Concepción,
CHILE

October 2002

Copyright © 2002.

Tópico 2: Cuarto Resumen.

Fabián A. Torres R.

Departamento de Física
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Universidad de Concepción

18 de octubre de 2002

1. Dispersión de ondas electromagnéticas.

Cuando una onda electromagnética incide sobre la superficie de un material como el océano, es parcialmente reflejada y parcialmente transmitida.

El campo de dispersión observado en un punto puede considerarse como la suma coherente de los campos de dispersión producidos por cada elemento de área iluminado de la superficie. El problema de calcular la energía dispersada lo dividimos en dos tareas, calcular la dispersión del campo electromagnético desde cada elemento de área y luego sumar la re-radiación proveniente de cada punto del espacio iluminado.

1.1. Ecuación vectorial de ondas

Podemos escribir una ecuación que relaciona a los campos eléctrico y magnético como:

$$\nabla \times \nabla \times B = \mu_0 \epsilon \nabla \times E + \mu_0 \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times E$$

De las ecuaciones de **Maxwell**, $\nabla \cdot B = 0$ luego:

$$\nabla^2 B = \mu_0 \sigma \frac{\partial B}{\partial t} + \mu_0 \epsilon \frac{\partial^2 B}{\partial t^2}$$

Esta ecuación muestra que el campo magnético presenta un factor de amortiguamiento en la ecuación de onda representado por la derivada de primer orden.

Para valores pequeños de σ ($\sigma \simeq 0$) se tiene que:

$$\nabla^2 B - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

Que es la ecuación de una onda con velocidad $c = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0^{1/2}}$

1.2. Teorema de Green y la integral escalar de la fórmula de Kirchhoff

El teorema de la divergencia es:

$$\int_V \nabla \cdot A d^3x = \oint_S A \cdot \hat{n}_0 d^2x \quad (2)$$

Si elegimos primeramente $A = B \cdot G$ y luego $A = G \cdot B$ y las reemplazamos en la ecuación ?? y luego las restamos entre si (con G una función escalar que describe un potencial de una onda radiada desde una fuente de corriente infinitesimal). Entonces:

$$G(R) = \frac{e^{ikR}}{4\pi R} \quad (3)$$

con

$$R = |x - x'|$$

el potencial G es la función de Green para el problema de radiación en el espacio libre(vacio). En definitiva se obtiene que:

$$\int_V (B \nabla^2 G - G \nabla^2 B) d^3x = - \oint_S \left(B \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial B}{\partial n} \right) d^2x \quad (4)$$

La ecuación de onda dada por 1 es correcta si no hay corrientes magneticas en el interior del volumen de integración, sin embargo si hay fuentes en el interior del volumen estas están dadas por el termino del lado derecho de la ecuación 3.

Si reemplazamos la ecuación de **Helmholtz** inhomogenea

$$\nabla^2 G + k^2 G = -\delta(x - x')$$

en el teorema de Green se obtiene que

$$B(x') = \oint \oint_{S''} \left(B \frac{\partial G}{\partial n''} - G \frac{\partial B}{\partial n''} \right) d^2x'' \quad (5)$$

Esta expresión representa el campo total. El vector equivalente de la ecuacion ?? puede ser derivado de la forma vectorial del teorema de la divergencia y el limite de la conductividad perfecta. Se puede mostrar que:

$$B(x) = \oint \oint_{S''} [(\hat{n}' \times) \times \nabla' G(x - x')] d^2x'$$

Dividimos la superficie de integración en dos partes. Una superficie concava cubriendo el dominio de integración a una distancia muy grande y que denotamos por S_∞ y la otra aproximadamente a nivel del mar denotada por S_0 .

En S_∞ el campo dispersado se desvanece lentamente y satsiface la condición de radiación de $1/R$. Sin embargo en el nivel del mar la corriente inducida en el punto x' es debida tanto al campo insidente como como al campo dispersado desde otra fuente inducida en otra parte de S_∞ , llamdo x'' .

Para el caso escalar podemos escribir la ecuación

$$\begin{aligned} B_t &= B_i(x) + \int_{S_0^t} \int \left[B_t(x') \frac{\partial G}{\partial n'} - G \frac{\partial B_t(x')}{\partial n'} \right] d^2x' \\ &= B_i(x) + B_s(x) \end{aligned}$$

donde B_i resulta de la integral sobre S_∞ y B_s sobre la superficie abierta S_0 . Esta es la ecuacion integral de la formula escalar de Kirchhoff, con la división explicita en los campos incidentes y dispersados.

1.3. Dispersión desde la superficie del oceano en la Aproximación de Kirchhoff

Para aplicar la formula escalar de Kirchhoff en el océano, asumiremos que el océano es un buen conductor electrico, ademas asumiremos que el punto de observación esta localizado en el campo de radiación lejano, de modo que los efectos del campo cercano sean despreciables. Los angulos de incidencia y dispersión θ_i y θ_s respectivamente, son definidos con respecto a la vertical, y k_i y k_s son los vectores de ondas asociados. Las coordenadas de la superficie del mar son $[x', y', \psi(x', y')]$, el punto de campo es x con $r=|x|$ y con la distancia entre el campo y la fuente como $R=|x-x'|$. Claramente:

$$R = r - \frac{k_s \cdot x'}{k} \quad (6)$$

La aproximacion del campo lejano consiste en despreciar la diferencia entre R y r en la ecuación 4, entonces podemos escribir:

$$G(R) = \frac{e^{ikR}}{4\pi R} \simeq \frac{e^{ikr} e^{-i\mathbf{k}_s \cdot x'}}{4\pi r}$$

y con

$$\hat{n}' \cdot \nabla' G(R) \simeq -i\mathbf{k}_s \cdot \hat{n}' G(R)$$

Suprimiendo la dependencia temporal de las ondas planas podemos escribir para el campo incidente:

$$B_i(\mathbf{x}') = B_0 e^{i\mathbf{k}_i \cdot x'}$$

Entonces obtenemos para el campo dispersado en un punto de observacion:

$$B_s \simeq -\frac{iB_0 e^{ikr}}{2\pi r} R_{v,h} \int \int_{-\infty}^{\infty} L(x', y') e^{[i(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_s) \cdot x']} \mathbf{k}_s \cdot \hat{n}' d^2x$$

Podemos escribir que:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_i &= k(\hat{i} \sin \theta_i - \hat{k} \cos \theta_i) = \mathbf{k}_{ih} + \mathbf{k}_{iz} \\ \mathbf{k}_s &= k[\sin \theta_s(\hat{i} \cos \phi_s + \hat{j} \sin \phi_s) + \hat{k} \cos \theta_s] \\ \hat{n}' &= \sin \beta(\hat{i} \cos \phi_s + \hat{j} \sin \phi_s) + \hat{k} \cos \beta \\ &= \frac{-\nabla'_h \psi + \hat{k}}{[1 + |\nabla'_h \psi|^2]^{\frac{1}{2}}} \\ \nabla'_h \psi &= \tan \beta(\hat{i} \cos \phi_s + \hat{j} \sin \phi_s) \\ &= \hat{i} \frac{\partial \psi}{\partial x'} + \hat{j} \frac{\partial \psi}{\partial y'} \\ d^2x' &= \sec \beta dx' dy' \end{aligned}$$

Estas transformaciones reducen la integración sobre la superficie del mar a una integración sobre el plano del nivel del mar.

$$B_s = \frac{ik_z B_0 e^{ikr}}{2\pi r} R_{v,h} \int \int_{-\infty}^{\infty} L(x', y') \times \left[1 - a \frac{\partial \psi}{\partial x'} - b \frac{\partial \psi}{\partial y'} \right] e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}'} dx' dy'$$

Donde

$$\begin{aligned}\mathbf{x}' &= x'\hat{i} + y'\hat{j} + \psi(x', y')\hat{k} \\ \kappa &= \mathbf{k}_s - \mathbf{k}_i = \kappa_h + \kappa_z \\ a &= \tan \theta_s \cos \phi_s \\ b &= \tan \theta_s \sin \phi_s\end{aligned}$$

1.4. Sección transversal de la superficie del océano

Se define la sección transversal biestática de dispersión por unidad de área, $\sigma^0(\theta_i, \theta_s, \phi_s)$ como la normalización por del flujo de energía dispersado por una unidad de área del mar desde el ángulo incidente θ_i , entre los ángulos θ_s, ϕ_s , y observado a una gran distancia. Podemos obtener una integral aproximada para la sección transversal de **backscatter**, dada por:

$$\sigma^0(\theta_i, -\theta_i, 0) = \sigma^0(\theta_i)$$

$$\sigma^0(\theta_i) = \frac{k^4}{\pi k_z^2} |R_{v,h}|^2 \int \int_{-\infty}^{\infty} L(x', y') e^{(-i2k_h \cdot x')} \times e^{\{-4k_z^2 \sigma_\psi^2 [1 - \rho(x')]\}} dx' dy' \quad (7)$$

Para backscatter, $k_{sh} = -k_{ih}$ y $k_{sz} = -k_{iz}$. La función que aparece $\rho(x')$ es la función normalizada de autocorrelación espacial.

La ecuación ?? representa una solución formal para la dispersión aleatoria de potencia de una onda electromagnética en la aproximación de Kirchhoff. Para obtener formulas mas explicitas es necesario hacer aproximaciones y cálculos adicionales.

1.5. Dispersión de un punto especular

Si las ondas oceánicas tienen un radio de curvatura R_x y R_y , grandes comparados con la longitud de onda de la onda electromagnética incidente, entonces estos actúan como pequeños planos tangentes ubicados en cada punto de dispersión de la superficie. La condición para esta aproximación es que:

$$\sqrt{(R_x^2 + R_y^2)} |k| \cos^3 \theta_i \gg 1$$

Se define la sección transversal de backscatter para este caso como:

$$\sigma_{v,h}^0(\theta_i) = \frac{|R_{v,h}(0)|^2}{2\sigma_u \sigma_c} \sec^4 \theta_i \exp\left(-\frac{\tan^2 \theta_i}{2\sigma_u^2}\right)$$

Aquí el coeficiente de **Fresnel** es evaluado en cero debido a la suposición de puntos especulares. Las cantidades σ_u y σ_c son las desviaciones estándar de la distribución anisotrópica en las direcciones de viento ascendente y transversales.

1.6. Teoría de las pequeñas perturbaciones (Bragg)

Cuando la longitud de onda de una onda electromagnética es rante comparada con la altura de la superficie del agua con respecto al nivel de equilibrio, se puede considerar que la superficie es poco rugosa, y el metodo de las pequeñas perturbaciones puede ser utilizado para evaluar la intgral de disperción.

La condición para quer sea aplicable este método es que las componentes del vector de onda asociado satisfagan las condiciones:

$$(k_w)_x = k_b = 2k \text{ sen } \theta_i$$

y

$$(k_w)_y = 0$$

El braggscatter se produce cuando las ondas viajan de forma paralela o perpendicularmente a la línea de *sight*.

La seccion transversal de braggscatter queda como:

$$\begin{aligned}\sigma_{hh}^0(\theta_i) &= 8\pi k^4 \cos^4 \theta_i |g_{hh}(\theta_i)|^2 \times [S(2k \text{ sen } \theta_i, 0) + S(-2k \text{ sen } \theta_i, 0)] \\ \sigma_{vv}^0(\theta_i) &= 8\pi k^4 \cos^4 \theta_i |g_{vv}(\theta_i)|^2 \times [S(2k \text{ sen } \theta_i, 0) + S(-2k \text{ sen } \theta_i, 0)]\end{aligned}$$

Donde las cantidades $S(\pm 2k \text{ sen } \theta_i, 0)$ son los valores del espectro del numero de onda bidi-mensional evaluado en en los positivos y negativos vectores de onda bragg. Los coeficientes $g_{hh}(\theta_i)$ y $g_{vv}(\theta_i)$ son los coeficientes de Fresnel modificados que para la transmision y resepcion vertical y horizontal respectivamente son:

$$\begin{aligned}g_{hh}(\theta_i) &= \frac{\epsilon_r - 1}{[\cos \theta_i + \sqrt{(\epsilon_r - \text{sen}^2 \theta_i)}]^2} \\ g_{vv}(\theta_i) &= \frac{(\epsilon_r - 1)[\epsilon_r(1 + \text{sen}^2 \theta_i) - \text{sen}^2 \theta_i]}{[\epsilon_r \cos \theta_i + \sqrt{(\epsilon_r - \text{sen}^2 \theta_i)}]^2}\end{aligned}$$