



Tópico 2: Segundo Resumen.

por

Fabián A. Torres R.

Informe Semanal

Departamento de Física

Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Universidad de Concepción
Av. Esteban Iturra s/n, Ciudad Universitaria
Casilla 160-C, Concepción,
CHILE

September 2002

Copyright © 2002.

Tópico 2: Segundo Resumen.

Fabián A. Torres R.

Departamento de Física
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Universidad de Concepción

24 de septiembre de 2002

1. Fuerzas internas en un fluido viscoso.

1.1. Fuerzas por presión

Consideremos un elemento de fluido de volumen $dx dy dz$ cuyo centro está en la posición X , la presión es la fuerza por unidad de área normal a la superficie. La fuerza neta en la dirección x actuando sobre la cara de área $dy dz$ es aproximadamente

$$- \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) dx dy dz$$

El signo menos indica que la fuerza actúa en sentido opuesto al sentido de crecimiento de x . Esta expresión se puede generalizar para cada cara obteniéndose para el volumen completo que:

$$- \left(\frac{\partial p}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \vec{k} \right) = -\nabla p$$

1.2. Fuerzas por viscosidad.

Para sumar el término de la fuerza por viscosidad, consideremos un fluido en el cual la velocidad depende de la altura y varía en todas direcciones tanto en fuerza como en dirección. Este fluido presenta una divergencia de la velocidad y una "SHEAR" tanto en lo vertical como en lo horizontal.

La divergencia es proporcional a $\frac{\partial u_i}{\partial x_i}$ y la "SHEAR" a $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ con i distinto de j . Estas nueve derivadas parciales, que describen la variación espacial de la corriente de velocidad, son proporcionales a un tensor llamado *tensor de presión* (stress tensor) que resume las fuerzas por viscosidad, presión y expansión que actúan por unidad de área sobre el fluido. Los términos de proporcionalidad son los factores A_i , los cuales incorporan los términos de viscosidad molecular, μ , y la viscosidad por turbulencia. En muchos fluidos (incluidos el mar y la atmósfera) la viscosidad efectiva es anisotrópica, por lo que los A_i son todas variables.

Para deducir las componentes del tensor, consideremos por ejemplo la velocidad en el plano XZ con dirección en el eje X. Experimentalmente se tiene que la presión es proporcional a la diferencia de velocidades entre $z - \frac{dz}{2}$ y $z + \frac{dz}{2}$, inversamente a la distancia dz y crece

directamente con el área $dx dy$. Luego de expandir en serie de Taylor las velocidades y las componentes de la presión se puede escribir que:

$$\tau_{zx} = A_z \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)$$

Adicionalmente a este término, se debe agregar otro con la contribución de la variación de velocidad horizontal de la velocidad vertical, con lo cual se obtiene que:

$$\tau_{zx} = A_z \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) + A_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

El primer subíndice indica que la velocidad varía en el eje z y que la presión actúa en el plano perpendicular a z (plano xy); El segundo subíndice indica la componente de la corriente y la dirección de la presión en cuestión.

El término A_z indica que la presión debida a este elemento es transmitida en la dirección del eje z .

La fuerza viscosa por unidad de masa la podemos escribir entonces como:

$$\begin{aligned} f_{vis} &= \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \tau \\ &= \frac{1}{\rho} [(\nabla \cdot A \cdot \nabla)u + (A \cdot \nabla) \nabla \cdot u + [(\partial_x + \partial_y + \partial_z)Tr(A)] \nabla(u + v + w)] \end{aligned}$$

El primer término representa el efecto de la viscosidad turbulenta interactuando con el SHEAR fluido. El segundo representa los efectos de la compresibilidad, y el tercero representa los efectos de la variación espacial en la viscosidad de torbellino, donde $Tr(A)$ representa la suma de los elementos de la diagonal de A .

Para un fluido incompresible y uniforme, los dos últimos términos son cero. Así se tiene que:

$$\begin{aligned} f_{vis} &= \frac{1}{\rho} [\nabla \cdot A \cdot \nabla] u \\ &= \frac{1}{\rho} [\partial_x A_x \partial_x + \partial_y A_y \partial_y + \partial_z A_z \partial_z] (u, v, w) \end{aligned}$$

En el océano el coeficiente de torbellino para el movimiento horizontal es mucho más grande que para el vertical. En lo horizontal generalmente depende de la posición (es anisotrópico). Si denotamos por A_h y A_v a los coeficientes de torbellino horizontal y vertical respectivamente, entonces la viscosidad total puede escribirse como:

$$A_x = A - y = A_h + \mu$$

y

$$\begin{aligned} A_z &= A_v + \mu \\ \Rightarrow A &= \begin{pmatrix} A_h & 0 & 0 \\ 0 & A_h & 0 \\ 0 & 0 & A_v \end{pmatrix} + \mu I_{3 \times 3} \end{aligned}$$

Si el coeficiente de torbellino es independiente de la posición entonces el operador de viscosidad se reduce a

$$\frac{1}{\rho} \nabla \cdot A \cdot \nabla = K_h \nabla_h^2 + K_v \frac{\partial^2}{\partial z^2} + v_m \nabla^2$$

con

$$\begin{aligned}\nabla_h^2 &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ v_m &= \frac{\mu}{\rho} \quad K_i = \frac{A_i}{\rho} \quad i = h, v\end{aligned}$$

con v_m llamado viscosidad cinemática.

Las cantidades K_h y K_v son análogas a la viscosidad molecular cinemática.

En resumen las fuerzas internas en el océano son modeladas por la presión y viscosidad de torbellino tal que:

$$f_{int} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \frac{1}{\rho}\nabla \cdot A \cdot \nabla u$$

2. Ecuación de conservación de masa y salinidad.

2.1. La ecuación de continuidad.

Para un elemento de volumen infinitesimal, el flujo de masa en la dirección x que entra por la cara izquierda es $\rho u dy dz$. El flujo que sale desde la cara derecha es $[\rho u + \partial_x(\rho u) dx] dy dz$ ya que la acumulación de masa en el volumen es:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) dx dy dz$$

Expresiones similares se tienen para los otros dos pares de caras.

La suma de estas expresiones para las seis caras es la variación local del cambio de densidad $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ por $dx dy dz$. Así la ecuación de continuidad es:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho u = 0$$

Una forma alternativa para esta expresión es desarrollando la ecuación anterior para obtener:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot u = 0$$

Para un fluido incompresible, la derivada convectiva es igual a cero lo que implica que $\nabla \cdot u = 0$

3. La ecuación de momentum.

Reordenando todos los términos que hemos encontrado escribimos la ecuación del momentum como:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u = -2\Omega \times u - \nabla \Phi - \frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot A \cdot \nabla u$$

En donde el primer término es la aceleración en un punto fijo, el llamado termino inercial. El segundo es el término no lineal advectivo que da la variación de velocidad a través de la trayectoria. El tercero es la aceleración de Coriolis. El cuarto es la combinación de las aceleraciones de gravedad y centripeta. El quinto es la fuerza de presión por unidad de masa, y el sexto es la combinación de las aceleraciones por viscosidad y remolinos.

4. Fluctuaciones, presión de Reynolds y coeficiente de torbellino.

En esta sección estudiaremos las fluctuaciones y la difusión en fluidos en terminos de procesos de largas y cortas escalas de tiempo y fuerzas de Reynolds, es decir las correlaciones entre los terminos aleatorios de las variaciones de los campos de velocidad y presión debido a los terminos no lineales de la ecuación de momentum.

Es claro que para el estudio de los movimientos de baja frecuencia en el mar los movimientos de alta frecuencia son de poco interés exepcto su contribución a la evolución de los fenomenos de baja frecuencia.

Para comensar, consideremos una conjunto de N medidas de una cantidad generica de fluido, $\gamma(X, t)$, El promedio de este conjunto lo podemos obtener mediante la operación:

$$\langle \gamma \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \gamma_i$$

Un metodo alternativo de promediar, es promediar en el tiempo. Si la serie de observaciones es continua por un tiempo suficientemente largo, entonces su promedio es:

$$\bar{\gamma} = \frac{1}{2t_a} \int_{-t_a}^{t_a} \gamma(t) dt$$

Si el proceso geofísico aleatorio e estadísticamente estacionario, entonces:

$$\bar{\gamma} \leftrightarrow \langle \gamma \rangle$$

El asumir la equivalencia entre el promedio temporal y el promedio grupal se llama *hipotesis ergódica* de mecánica estadística.

Para una cantidad generica del fluido, es razonable asumir la posibilidad de dividir su fluctuación en dos procesos, uno de alta y otro de baja frecuencia, y estrudiar las consecuencias en la ecuación del fluido. Así escribimos la cantidad como la suma del promedio de la parte de baja frecuencia más la parte fluctuante(proceso de alta frecuencia).

Nuestro objetivo ahora es mezclar la parte promedio y fluctuante de una cantidad con la definición de viscosidad turbulenta y el tensor de difusividad. Asumiremos que el fluido es incompresible con lo que la ecuacion de continuidad se reduce a:

$$\nabla \cdot u = 0$$

Separando u como $u = U + u'$ se tiene que

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (U + u') &= 0 \\ \langle \nabla \cdot (U + u') \rangle &= \nabla \cdot \langle U \rangle + \nabla \cdot \langle u' \rangle = 0 \end{aligned}$$

Por definición $\nabla \cdot \langle u' \rangle = 0$ lo que implica que $\nabla \cdot \langle U \rangle = 0$.
veamos ahora los efectos sobre la ecuación de momentum. Aplicando este procedimiento a la ecuacion de momentum se obtiene:

$$\frac{\partial U}{\partial t_0} + U \cdot \nabla U + 2\Omega \times U + \nabla \Phi + \frac{1}{\rho} \nabla p = \frac{1}{\rho} \nabla \cdot A \cdot \nabla U$$

5. Condiciones de borde en dinamica de fluidos.

Las ecuaciones diferenciales parciales quedan completamente si se conocen las condiciones iniciales y las condiciones de contorno.

Las condiciones iniciales dependen de cada problema, en cambio podemos tratar algunos casos generales de las condiciones de contorno.

5.1. Condiciones de rigidez y frontera impermeable.

Si la superficie no se mueve y no hay flujo a traves de la frontera entonces se tiene que:

$$\begin{aligned}u \cdot \vec{n} &= 0 \\j \cdot \vec{n} &= 0 \\j_d \cdot \vec{n} &= 0\end{aligned}$$

donde $\vec{n}$ es un vector normal a la frontera.

5.2. frontera interfacial

Para una frontera deformable como la superficie del agua como ejemplo, si consideramos que $\xi(x, y, t)$ es una función que describe la elevacion de la superficie del agua con respecto al nivel de referencia z_0 , entonces para que una particula se mantenga en la interface se tienen que:

$$\frac{D}{Dt}(z - (z_0 + \xi)) = 0$$

resolviendo para w (velocidad en z):

$$w = \frac{\partial \xi}{\partial t} + u \frac{\partial \xi}{\partial x} + v \frac{\partial \xi}{\partial y}$$

Es la condición cinemática de frontera en la velocidad vertical de una superficie libre. Esta condición es no lineal, sin embargo si suponemos que $\frac{\partial \xi}{\partial x}$ y $\frac{\partial \xi}{\partial y}$ son muy pequeños comparados con $\frac{\partial \xi}{\partial t}$ entonces:

$$w \approx \frac{\partial \xi}{\partial t}$$

5.3. Condiciones de contorno para fluidos viscosos.

Un fluido viscoso requiere de la condicion adicional

$$u \times \vec{n} = u_b$$

Si la frontera es fija, entonces esta condicion requiere que la velocidad del fluido en el interior sea cero, o si se mueve el borde, que la capa del fluido se mueva al unisono con la frontera.