

Resumen 1

Fabian Torres

August 27, 2002

1 Primer resumen

1.1 Parrafo 3.2: la derivada convectiva y la ecuacion del momentum

Consideremos como parcela de fluido o elemento de materia a una porción de material suficientemente pequeña como para considerarla un infinitésimo matemático pero lo suficientemente representativo como para que contenga un número grande de moléculas de agua y materiales disueltos. En esta parcela se evitarán explisitamente las fuerzas intermoleculares.

Para una propiedad arbitraria α , la razón de cambio de la propiedad en funcion del tiempo es:

$$\begin{aligned}\frac{d\alpha}{dt} &= \frac{\partial\alpha}{\partial t} + \frac{\partial\alpha}{\partial x}dx + \frac{\partial\alpha}{\partial y}dy + \frac{\partial\alpha}{\partial z}dz \\ &= \frac{\partial\alpha}{\partial t} + \frac{dX}{dt} \cdot \nabla\alpha\end{aligned}$$

Definimos el operador D/Dt (derivada convectiva) como

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \cdot \nabla$$

donde u es la velocidad de la parcela. Este operador entrega la razon total de cambio de la propiedad a que se aplica.

al aplicarse este operador sobre la velocidad del fluido, se obtiene la aceleracion de este, asi se tiene que la segunda ley de Newton para la parcela se escribe como:

$$\rho \frac{Du}{Dt} dxdydz = \sum_i \rho f_i dxdydz$$

donde f_i son las fuerzas por unidad de masa actuando sobre el elemento de fluido.

1.2 Parrafo 3.3: Fuerzas gravitacionales:

Las fuerzas que actuan mas claramente sobre el mar son las fuerzas gravitacionales. Aslgunos claros efectos son las mareas, la formacion de una superficie equipotencial, comprime el agua, crea uñondas gravitacionales en el agua.

Si consideramos una parcela de fluuido sin rotacion, esferica y bajo el supuesto de una tierra sin rotacion se tiene que la fuerza de gravedad es :

$$\frac{d^3 F}{\rho d^3 X} = -\frac{GM}{r^2} \hat{r}$$

Este campo vectorial lo podemos obtener de un campo escalar Φ como:

$$\Phi = -\frac{GM}{r}.$$

Se define la geoide como una superficie con geopotencial constante, y la geoide marina como la superficie del oceano asumiendo que este no se mueve, la tierra no rota y que la unica fuerza que actua sobre el agua es la gravitacional.

1.3 Parrafo 3.4: Efecto del spin:

La rotacion y traslacion de la tierra tiene dos efectos principales, clasificados como fuerzas ficticias, las llamadas Fuerza de Coriolis y la fuerza centrifuga.

Usaremos la palabra spin para describir el movimiento diario de la tierra sobre su eje, y la rotacion para referirnos a su movimiento anual en torno al sol.

Si queremos derivar estas fuerzas fictisias, debemos considerar su velocidad angular, ω , en un sistema inercial .

Este vector esta dirigido en la direccion norte-sur. La magnitud de este esta dada por:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1 \text{ año}}{1 \text{ año} + 1 \text{ día}} = \frac{\text{marco rotacional}}{\text{marco inersial}} \\ |\omega| &= 2\pi f = 2\pi \left(\frac{1 \text{ año}}{1 \text{ año} + 1 \text{ día}} \right)^{-1} = 2\pi \left(1 + \frac{1}{365.24} \right) \end{aligned}$$

Para una propiedad A_i sus coordenadas en cada uno de estos marcos(inercial y rotacional) son:

inercial:

$$A_i = (A_x, A_y, A_z) \cdot (i, j, k)$$

rotacional (no inercial):

$$A'_i = (A'_x, A'_y, A'_z) \cdot (i', j', k')$$

entonces al derivada es:

$$\begin{aligned}
\frac{dA_i}{dt} &= i \frac{dA_x}{dt} + j \frac{dA_y}{dt} + k \frac{dA_z}{dt} + A_x \frac{di}{dt} + A_y \frac{dj}{dt} + A_z \frac{dk}{dt} \\
&= i \frac{dA_x}{dt} + j \frac{dA_y}{dt} + k \frac{dA_z}{dt} \\
&= i' \frac{dA'_x}{dt} + j' \frac{dA'_y}{dt} + k' \frac{dA'_z}{dt} + A'_x \frac{di'}{dt} + A'_y \frac{dj'}{dt} + A'_z \frac{dk'}{dt} \\
&= \frac{dA'_i}{dt} * (i', j', k') + \frac{d}{dt} (i', j', k') * A'_i
\end{aligned}$$

Ademas podemos definir el operador:

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_i = \left(\frac{d}{dt}\right)_r + \Omega \times$$

que aplicado a la velocidad es:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{du_i}{dt}\right)_i &= \left(\frac{du_i}{dt}\right)_r + \Omega \times u_i \\
&= \frac{d}{dt}(u_r + \Omega \times x) + \Omega \times (u_r + \Omega \times x)
\end{aligned}$$

el lado izquierdo es la aceleracion en el marco inercial y en lado derecho es la aceleracion no inercial, la aceleracion de Coriolis y la aceleracion centrifuga. desarrollando los terminos podemos escribir.

$$\left(\frac{du_i}{dt}\right)_i = \left(\frac{du_r}{dt}\right)_r + 2\Omega \times u_r + \Omega \times (\Omega \times x) \quad (1)$$

Podemos representar estas aceleraciones vectorialmente en un esquema de tierra eliptica en donde el radio varia con la latitud (el angulo θ de esta expresion es la colatitud).

El doble producto cruz es un vector perpendicular al eje de spin y apunta hacia fuera de la tierra y su efecto es cambiar la aceleracion de gravedad g_0 a una magnitud y direccion g_{effect} .

Entonces podemos escribir:

$$\begin{aligned}
g_{effect} &= g_0 + \Omega^2 R_e \sin(\theta) \hat{\rho} \\
\hat{\rho} &= \hat{r} \sin(\theta) + \hat{\theta} \cos(\theta)
\end{aligned}$$

En conclusion podemos definir un potencial efectivo que es la suma de uno gravitacional mas uno centripeto

$$\Phi_{effect} = \Phi_g - \frac{\Omega^2 r^2}{2} \sin^2(\theta)$$

En este caso como la velocidad es funcion tanto del tiempo como del espacio, la derivada total (la aceleracion) queda como:

$$\left(\frac{Du_i}{Dt}\right)_i = \left(\frac{\partial u_r}{\partial t}\right)_r + u_r \cdot \nabla u_r + 2\Omega \times u_r + \Omega \times (\Omega \times x)$$

todas las cantidades del lado derecho están especificadas en el marco rotacional.

1.4 Parrafo 3.6: mas gravedad

La tierra no es esferica sino mas parecida a una elipse en rotacion, además no tiene una distribución uniforme de masas. Esto produce que el geopotencial no sea esferico y produce pequeñas variaciones en la aceleración de gravedad.

Entonces podemos hacer una expansión del geopotencial, en coordenadas esfericas, con el origen en el centro de masas y el eje z coincidiendo con el eje del spin.

La base de la expansión son los polinomios asociados de Legendre.

Con esta expansión podemos escribir la fuerza resultante como el gradiente del potencial obtenido.

En los graficos del libro aparecen las diferencias de altura producidas por la no uniformidad del campo gravitacional terrestre.

1.5 Parrafo 3.7: fuerzas de mareas

En principio, todos los cuerpos actúan sobre el campo gravitacional, pero en la práctica, solo la luna y el sol son capaces de modificar significativamente este campo provocando las mareas.

Las complejas trayectorias de estos cuerpos afectan tanto en amplitud, fase y frecuencia a las mareas.

si consideramos los tres cuerpos sol-tierra-luna, notamos que el sistema tierra-luna gira en torno al centro de masas común entre el sistema y el sol, el cual está ubicado solo a un 0.06% del radio solar.

en cambio, el centro de masas entre la tierra y la luna está ubicado aproximadamente a un 73% del radio terrestre.

Las mareas más fuertes son producidas cuando los tres cuerpos están alineados, y se llaman "spring tide".

en cambio, las mareas más bajas se producen cuando los cuerpos están en "cuadratura", y las mareas se llaman en este caso "neap tide"

1.6 Parrafo 3.8: potencial total causado por la gravedad y la rotación.

En conclusión, el potencial efectivo que actúa sobre la superficie terrestre es la suma del potencial gravitacional más el potencial centrífugo más el potencial de las mareas:

$$\Phi(r, \theta, \phi, t) = \Phi_g + \Phi_c + \Phi_t$$

Y la fuerza neta exterior que actua sobre una parcela es:

$$F_{ext} = -\nabla\Phi$$