1 Nociones Previas

1.1 Normal Principal y Plano Osculador

La recta que pasa por el punto $\vec{x}(s)$ de una curva C y que es paralela a $\vec{V}_2$ se llama recta normal principal.

Definición: *El plano que contiene a la recta tangente y a la normal se llama plano Osculador*

La ecuación que rige al plano osculador es $(y - \vec{x}) \cdot (\vec{V}_1 \times \vec{V}_2) = 0$.

1.2 Vector Binormal

Sea $\vec{x} = \vec{x}(i)$ una curva de clase C ≤ 2 y supongamos que a lo largo de ella $\vec{V}_2$ sea continuo, esto implica que en todos los puntos de la curva tenemos dos vectores ortoganales unitarios y continuos: estos son los vectores $\vec{V}_1$ y $\vec{V}_2$

Falta Un dibujo y Su explicacion.

El plano que contiene a $\vec{V}_1 \times \vec{V}_3$ y que ademas pasa por $\vec{x}(i)$ es llamado plano rectificante.

1.3 triedro movil

La triada de vectores $(\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3)$ unitarios ortonormales se conoce como el triedro movil. Tambien se le conoce como vectores unitarios de Frenet.

1.4 Torsión

Si $\vec{x} = \vec{x}(s)$ es una curva regular de clase $C \leq 3$ tal que a lo largo de ella $\vec{V}_3(s)$ es de clase $C \leq 1$ entonces $\vec{V}_3$ es derivable.

$$
\begin{aligned}
\vec{V}_3 &= \vec{V}_1 \times \vec{V}_2 \\
\vec{V'}_3 &= \vec{V'}_1 \times \vec{V}_2 + \vec{V}_1 \times \vec{V'}_2
\end{aligned}
$$

pero $\vec{V'}_1 = \quad \vec{V}_2$

$$
\begin{aligned}
\vec{V}_3 &= \quad \vec{V}_2 \times \vec{V}_2 + \vec{V}_1 \times \vec{V'}_2 \\
&= \vec{V}_1 \times \vec{V'}_2
\end{aligned}
$$

Dado que

$$\vec{V}_2 \cdot \vec{V}_2 = 1 \Rightarrow \frac{d}{ds}(\vec{V}_2 \cdot \vec{V}_2) = 2\vec{V'}_2 \cdot \vec{V}_2 = 0$$

Esto implica que $\vec{V}_2$ es siempre perpendicular a $\vec{V'}_2$, lo cual implica que $\vec{V'}_2$ pertenece al plano rectificante, En otras palabras, $\vec{V'}_2$ debe ser una combinación lineal de $\vec{V}_1$ y $\vec{V}_3$.

$$\begin{aligned} \vec{V'}_2 &= (s)\vec{V}_1 + \tau(s)\vec{V}_3 \\ \vec{V'}_3 &= (s)\vec{V}_1 \times \vec{V}_1 + \tau(s)\vec{V}_1 \times \vec{V}_3 \\ &= \tau(s)\vec{V}_1 \times \vec{V}_3 \\ &= -\tau(s)\vec{V}_2 \end{aligned}$$

Definición:*La funcion $\tau(s)$ se denomina segunda curvatura o torsión de la curva en $\alpha = \alpha(s)$*

Teorema: *Si una curva es de clase $C \leq 3$ y si a lo largo de ella $\vec{V}_2$ es de clase $C \leq 1$* entonces la curva sera una curva plana si y solo si su torción es identicamente nula.

1.5 Ecuaciones de Frenet-Serret

Teorema:*Si $\alpha = \alpha(s)$ es una representación natural de una curva de clase C^m con ≤ 3 entonces la terna $(\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3)$ satisface las siguientes ecuaciones:*

$$\begin{aligned} \vec{V'}_1 &= \vec{V}_2 \\ \vec{V'}_2 &= - \vec{V}_1 + \tau\vec{V}_3 \\ \vec{V'}_3 &= -\tau\vec{V}_2 \end{aligned}$$

Donde es la curvatura y τ es la torsión.

demostracion:

$$\begin{aligned} \vec{V}_2 &= \vec{V}_3 \times \vec{V}_1 \\ \vec{V'}_2 &= \vec{V'}_3 \times \vec{V}_1 + \vec{V}_3 \times \vec{V'}_1 \\ &= -\tau\vec{V}_2 \times \vec{V}_1 + \vec{V}_3 \times \vec{V}_2 \\ &= \vec{V}_3 \times \vec{V}_2 - \tau\vec{V}_2 \times \vec{V}_1 \\ &= - \vec{V}_1 + \tau\vec{V}_3 \end{aligned}$$

1.6 Teorema de Existencia y Unisidad

Teorema: *Sean $\tau(s)$ y (s) dos funciones continuas arbitrarias en el intervalo (a,b). Entonces independiente de se su posición en el espacio existe un una y solo una curva espacial C cuya curvatura es (s) y cuya torción es $\tau(s)$ donde s es un parametro natural (longitud de arco).*

1.7 Superficies

Definición: *Una superficie es un mapeo diferencial donde un dominio abierto D de R^2 en una región M de R^3.*

Asis se asocia con cada punto de R^2, el cual es caracterizado o parametrizado por los numeros sobre (u, v) un punto $p \in R^3$ conosido como punto imagen de (u, v).

El conjunto de todos los puntos iamgenes es la noción ordinaria de superficie.

Una superficie parametrizada por los puntos (u, v) es descrita por las ecuaciones $\vec{x} = \vec{x}(u, v)$.

Si mantenemos constante u o v obtenemos curvas en la superficie:

$\vec{x} = \vec{x}(u, v_0)$ es una curva de parámetro u.

$\vec{x} = \vec{x}(u_0, v)$ es una curva de parámetro v.

Definición: *El vector tangente a la curva de parametro u se denota por $\vec{x}_u = \frac{\partial \vec{x}}{\partial u}$. De forma análoga, el vector tangente a la curva de parámetro v se denota por $\vec{x}_v = \frac{\partial \vec{x}}{\partial v}$.*

Definición: *Una representación paramétrica regular de clase C^m con ≤ 1 es una aplicación $\vec{x} = \vec{x}(u, v)$ desde un abierto $U \subseteq R^2$ en un conjunto S de R^3 que satisface las siguientes propiedades:*

- $\vec{x} = \vec{x}(u, v)$ es de clase C^m con ≤ 1 en el dominio U
- El rango de la matriz Jacobiana J de la transormación es 2.

1.8 Cartas locales

Una carta local de clase C^m con ≤ 1 en una superficie es una aplicación $\vec{x} = \vec{x}(u, v)$ de un abierto U en la superficie, tal que:

- $\vec{x} = \vec{x}(u, v)$ es de clase C^m con ≤ 1 en U.

- $\vec{x}_u \times \vec{x}_v \neq 0 \forall (u,v) \in U$.
- $\vec{x} = \vec{x}(u,v)$ es inyectiva y bicontinua.

Esto implica que una carta local es una representación paramétrica regular de una parte de la superficie que es inyectiva y bicontinua .

1.9 Vector Tangente y Normal a la Superficie

Si $\vec{x} = \vec{x}(u,v)$ es una carta definida sobre un abierto U de R^2 y si $u = u(t)$, $v = v(t)$ es una curva C de clase C^m contenida en $U \subseteq R^2$, entonces la curva imagen $\vec{y} = \vec{x}(u(t), v(t))$ es de clase C^m y esta sobre la superficie.

Debe ser notado de:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{y}}{dt} &= \frac{\partial \vec{x}}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial \vec{x}}{\partial v}\frac{dv}{dt} \\ &= \vec{x}_u \frac{du}{dt} + \vec{x}_v \frac{dv}{dt} \neq 0 \end{aligned}$$

Debido a que $\vec{x}_u$ y $\vec{x}_v$ son linealmente independientes.

$\frac{du}{dt}, \frac{dv}{dt}$ no pueden ser simultaneamente nulos debido a que la curva es regular.

Definición: *Un vector $\vec{T}$ es tangente a la superficie en un punto p si existe una curva regular $\vec{y} = \vec{x}(u(t), v(t))$, sobre la superficie, que pase por p tal que:*

$$\vec{T} = \frac{d\vec{y}}{dt}$$

Teorema: *Si $\vec{x} = \vec{x}(u,v)$ es una carta local que contiene el punto p y si $\vec{y} = \vec{y}(u(t), v(t))$ es una curva regular sobre la superficie entonces el vector $\vec{T}$ es:*

$$\vec{T} = \frac{dy}{dt} = \vec{x}_u \frac{du}{dt} + \vec{x}_v \frac{dv}{dt}$$

es un vector tangente a la superficie, el cual es una combinación lineal de $\vec{x}_u$ y $\vec{x}_v$.

Definición: *El plano tangente a la superficie en p es un plano que pasa por p y que es paralelo a $\vec{x}_u$ y $\vec{x}_v$.*