1 Nociones Previas

1.1 Curvas

Una curva es un mapeo diferenciable desde un conjunto abierto de R^1 en una región M de R^3.

Una curva en M es un mapeo desde R^1 en M.

El punto $\lambda \in R^1$ es mapeado en $P \in M$. La imagen del intervalo abierto (a, b) de R^1 es la linea mostrada en M.

Así tenemos que uno asocia con cada punto de R^1, el cual es un numero real λ,en un punto en M el cual es llamado el punto imagen de λ.

El conjunto de todos los puntos imagenes es la noción ordinaria que tenemos de curva.

Esta definición asocia cada punto de M un valor de λ, lo que implica que tenemos una curva parametrizada con un parametro λ, esto implica que dos curvas pueden ser diferentes aún si ellas tienen la misma imagen en M, con tal que ellas asignen un valor diferente del parametro a los puntos imagen. *Nota: Con la palabra mapeo diferencial queremos decir que las coordenadas de los puntos imagen* $\vec{x} = \vec{x}(\lambda)$ sion funciones diferenciales , lo que implica que una curva es descrita por las ecuaciones $\vec{x} = \vec{x}(\lambda)$.

Definición: *Una funcion vectorial* $\vec{x} = \vec{x}(\lambda)$ *con* $\lambda \in (a, b) = I$ *es llamado representación paramétrica regular de parametro* λ *si satisface las siguientes propiedades:*

- $\vec{x} = \vec{x}(\lambda)$ es de clase C^1 en el intervalo (a, b).
- $\vec{x'}(\lambda) = \frac{d\vec{x}}{d\lambda} \neq 0, \quad \forall\lambda \in I = (a, b)$.

1.2 Curvas Regulares

Una función paramétrica $\lambda = \alpha(\theta)$ en un intervalo de I_θ es un cambio admisible de parámetro si:

- $lambda = \alpha(\theta)$ es de clase C^1 en el intervalo I_θ.
- $\frac{d\alpha}{d\theta} \neq 0 \qquad \forall\theta \in I_\theta$

Teorema: *Si* $lambda = \alpha(\theta)$ *representa un cambio admisible de parámetro en el intervalo* I_θ*, entonces:*

- $lambda = \alpha(\theta)$ es una aplicación inyectiva de I_θ en un intervalo I_λ que se obtiene como:

$$I_\lambda = \alpha(I_\theta)$$

- La función inversa $\theta = \theta(\lambda)$ es a su vez un cambio admisible de parámetro en I_λ.

jemplo: La función:

$$\lambda = (b-a)\theta + a$$

con $0 < \theta < 1$, y $a < \lambda < b$ representa un cambio admisisble de parámetro.

En efecto, transforma el intervalo $I_\theta = (0,1)$ en el intervalo $I_\lambda = (a,b)$.

Si $\theta = 0 \Rightarrow \lambda = a$
Si $\theta = 1 \Rightarrow \lambda = b$

La función inversa

$$\theta = \frac{\lambda - a}{b - a}$$

hace posible el paso de $I_\lambda : a < \lambda < b$ a $I_\theta : 0 < \theta < 1$.

1.3 Longitud de arco

Sea $I_\theta = (0,1) \in R^1$ un intervalo abierto de R^1 y sea $\vec{x} = \vec{x}(\lambda)$ una curva que va de I a R^3; $I \to R^3$ una curva parametrizada con un parámetro λ.

La longitud de arco de la curva desde $x(\lambda_0)$ a $x(\lambda)$ es

$$s(\lambda) = \int_{\lambda_0}^{\lambda} |\frac{d\vec{x}(\lambda)}{d\lambda}| d\lambda = \int_{\lambda_0}^{\lambda} \sqrt{\left(\frac{dx_1}{dlambda}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{d\lambda}\right)^2 + \left(\frac{dx_3}{d\lambda}\right)^2} d\lambda$$

Del teorema fundamental del cálculo:

$$\begin{aligned} \frac{ds}{d\lambda} &= \frac{d}{d\lambda}\int_{\lambda_0}^{\lambda} |\frac{d\vec{x}(\lambda)}{d\lambda}| d\lambda = |\frac{d\vec{x}(\lambda)}{d\lambda}| \\ \frac{ds}{d\lambda} &= |\frac{d\vec{x}}{d\lambda}| \end{aligned}$$

$x = x(\lambda)$ es una curva parametrizada con parametro λ.

Esta curva puede ser parametrizada con un parametro s sy y solo si $s = s(\lambda)$ es un cambio admisible de parametro.

De acuerdo con el teorema anterior $s = s(\lambda)$ sera un cambio admisible de parametro si se cumple que:

- $s(\lambda)$ es de clase C^1
- $\frac{ds}{d\lambda} \neq 0 \forall \lambda \in (a, b)$

En efecto, dado que

$$\frac{ds}{d\lambda} = |\frac{d\vec{x}}{d\lambda}|$$

y dado que $x = x(\lambda)$ es una parametrización, lo que implica que $\frac{ds}{d\lambda} \neq 0$ y puesto que $s = s(\lambda)$ es de clase C^n en el intervalo (a, b) entonces $s = s(\lambda)$ es un cambio admisible de parámetro, lo que implica que la longitud de arco s puede ser usada como un parámetro.

1.4 Vector Unitario Tangente

Sea $x = x(s)$ una curva parametrizada con parametro s. Se define el vector unitario tangente a la curva como

$$\vec{V}_1 = \frac{d\vec{x}}{ds} = \vec{x'}(s)$$

el cual tiene longitud unitaria.

En efecto:

$$\begin{aligned} |\vec{x'}(s)| = |\frac{d\vec{x}}{ds}| &= |\frac{d\vec{x}}{d\lambda}||\frac{d\lambda}{ds}| \\ &= \frac{|\frac{d\vec{x}}{d\lambda}|}{|\frac{d\vec{x}}{d\lambda}|} = 1 \end{aligned}$$

1.5 Recta Tangente y Plano Normal

La recta que pasa por un punto x_0 de una curva regular C y que tiene la misma dirección que el vector $\vec{V}_1(s)$ en x_0 es llamada recta tangente a la curva C en x_0.

El plano que pasa por x_0 y es ortogonal a la tangente en $x_0$se llama plano normal a la curva C en el punto x_0.

Definición: *Una curva $\vec{x} = \vec{x}(s)$ es llamada regular si todos sus vectores tangente son distintos de cero.*

Una curva de esta naturaleza no puede tener puntas agudas ni esquinas.

Si $\vec{x} = \vec{x}(s)$ es una curva regular de clase ≥ 2, entonces el vector tangente $\vec{V} = \vec{V_1}(s) = \vec{x'}(s)$ es de clase ≥ 1, por lo cual puede ser derivado.

1.6 Curvatura

Puedto que $\vec{V_1}(s)$ tiene magnitud constante e igual a 1 se tiene que cualquier cambio en $\vec{V_1}$ significa un cambio en su dirección. Así la derivada $\vec{V'}_1(s) = \vec{x''}(s)$ mide la manera en que la curva se curva en R^3.

Definimos el vector curvatura de la curva $\vec{x} = \vec{x}(s)$ como:

$$\vec{k} = \vec{k}(s) = \vec{V'}_1(s) = \frac{d\vec{V_1}}{ds}$$

Dado que $\vec{V_1} \cdot \vec{V_1} = 1$ entonces:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}\left(\vec{V_1} \cdot \vec{V_1}\right) &= \vec{V'}_1 \cdot \vec{V_1} + \vec{V_1} \cdot \vec{V'}_1 \\ &= 2\vec{V'}_1 \cdot \vec{V_1} = 0 \\ &\Rightarrow \vec{V'}_1 \cdot \vec{V_1} = 0 \end{aligned}$$

Lo que quier decir que $\vec{V'}_1(s)$ es siempre ortogonal a $\vec{V_1}$ y ademas, $\vec{V'}_1(s)$ es siempre ortogonal a la curva $\vec{x} = \vec{x}(s)$

El vector $\vec{k}(s)$ se llama vector curvatura y la norma de este $\kappa = |\vec{k}(s)|$ se le conoce como curvatura de C en $\vec{x}(s)$.

El recíproco de κ es $\rho = \frac{1}{\kappa}$ se denomina radio de curvatura de C en x.

1.7 Vector Unitario Normal Prinsipal

Si la curva no tiene puntos de inflexión, es decir si$\vec{k} = \vec{k}(s)$ es siempre distinto de cero, entonces $\forall s$ podemos definir el vector unitario normal principal como $\vec{V_2} = \frac{\vec{k}(s)}{|\vec{k}(s)|} = \frac{\vec{k}(s)}{\kappa}$, lo que se puede exprezar como:

$$
\begin{aligned}
\vec{V}_2 &= \frac{\vec{k}(s)}{|\vec{k}(s)|} = \frac{\vec{k}(s)}{\kappa} \\
&\Rightarrow \vec{k}(s) = \kappa \vec{V}_2(s) \\
&\Rightarrow \vec{V}_2(s) \perp \vec{V}_1(s)
\end{aligned}
$$