1 Segunda forma fundamental

Si $\vec{x} = \vec{x}(u^1, u^2)$ es una cartaen una superficie de clase C^2 entonces la normal unitaria $\vec{N}$ es de clase C^1.

$$\vec{N} = \frac{\vec{x}_{u^1} \times \vec{x}_{u^2}}{|\vec{x}_{u^1} \times \vec{x}_{u^2}|}$$

La diferencial

$$\begin{aligned} d\vec{N} &= \frac{\partial N}{\partial u^1} du^1 + \frac{\partial N}{\partial u^2} du^2 = N_{u^1} du^1 + N_{u^2} du^2 \\ &= N_{u^i} du^i \end{aligned}$$

es ortogonal a $\vec{N}$. En efecto:

$$\begin{aligned} \vec{N} \cdot \vec{N} = 1 &\Rightarrow d(\vec{N} \cdot \vec{N}) = 2d\vec{N} \cdot \vec{N} = 0 \\ &\Rightarrow d\vec{N} \cdot \vec{N} = 0 \Rightarrow d\vec{N} \perp \vec{N} = 0 \end{aligned}$$

lo que nos indica que $d\vec{N}$ es paralelo al plano tangenet en el punto $\vec{x}(u^1, u^2)$. Así:

$$d\vec{N} = \vec{N}_{u^i} du^i$$
$$d\vec{x} = \vec{x}_{u^i} du^i$$

Definición: *Se llama segunda forma fundamental a la proyección de $d\vec{N}$ a lo largo de la dirección $d\vec{x}$, es decir al producto escalar:*

$$\begin{aligned} \aleph &= -d\vec{x} \cdot d\vec{N} = -\left(\vec{x}_{u^i} du^i\right)\left(\vec{N}_{u^k} du^k\right) \\ &= -\left(\vec{x}_{u^i} \cdot \vec{N}_{u^k}\right) du^i du^k = b_{ik} du^i du^k \end{aligned}$$

Donde $b_{ik} = -\left(\vec{x}_{u^i} \cdot \vec{N}_{u^k}\right)$ son funciones continuas conosidas como los coeficientes de la segunda forma fundamental, los cuales bajo una transformación de coordenadas de la forma:

$$\overline{u^1} = \overline{u^1}(u^1, u^2)\overline{u^2} = \overline{u^2}(u^1, u^2)$$

se transforma como:

$$\overline{b}_{ik} = \frac{\partial u^i}{\partial \overline{u}^j} \frac{\partial u^k}{\partial \overline{u}^l} b_{jl}$$

es decir los coeficientes de la segunda forma fundamental se transforman como las componentes de un tensor covariante de segundo orden.
Puesto que $\vec{x}_{u^i}$ y $\vec{N}$ son ortogonales, se tiene entonces que $\vec{x}_{u^i} \cdot \vec{N} = 0$. Si derivamos con respecto a u^k entonces se tiene que:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \vec{x}_{u^i}}{\partial u^k} \cdot \vec{N} \quad &+ \quad \vec{x}_{u^i} \frac{\partial \vec{N}}{\partial u^k} = 0 \\
\vec{x}_{u^i} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^i} \quad &\Rightarrow \quad \frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial u^i \partial u^k} \cdot \vec{N} + \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^i} \frac{\partial \vec{N}}{\partial u^k} = 0 \\
\frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial u^i \partial u^k} \cdot \vec{N} \quad &= \quad -\vec{x}_{u^i} \cdot \vec{N}_{u^k} = b_{ik} \\
b_{ik} = \vec{x}_{u^i u^k} \cdot \vec{N} \quad &= \quad \frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial u^i \partial u^k} \cdot \vec{N}
\end{aligned}$$

Esto implica que la segunda forma fundamental es:

$$\begin{aligned}
\aleph &= -d\vec{x} \cdot \vec{N} = b_{ik} du^i du^k \\
&= \frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial u^i \partial u^k} \cdot \vec{N} du^i du^k \\
&= \frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial u^i \partial u^k} du^i du^k \cdot \vec{N} = d^2 \vec{x} \cdot \vec{N} \\
\Rightarrow \aleph &= -d\vec{x} \cdot \vec{N} = d^2 \vec{x} \cdot \vec{N}
\end{aligned}$$

1.1 Desviación de una superficie de su plano tangente

Una interesante interpretación geométrica de la segunda forma fundamental puede ser obtenida a partir de la determinación de la forma de la superficie de una pequeña vecindad de un punto P arbitrario cuyo vector de posición es $\vec{x}(u^1, u^2)$.
Sea P un punto de una superficie de clase $C \geq 2$, sea Q un punto en la vecindad de P, y sea $\vec{x} = \vec{x}(u^1, u^2)$ una carta que contiene a los puntos P y Q.
El punto P será determinado por $\vec{x}(u^1, u^2)$.
El punto Q será determinado por $\vec{x}(u^1 + du^1, u^2 + du^2)$.

Nuestro problema es determinar la desviación de la superficie de su plano tangente.
Sea $d = \vec{PQ} \cdot \vec{N}$ la proyección de $\vec{PQ}$ sobre la normal $\vec{N}$.

Notemos que d puede ser positivo o negativo segu Q esté de un lado o del otro del plano tangente en $P(d$ es la distancia perpendicular desde Q al plano tangente en $P)$.

$$\vec{PQ} = \vec{x}(u^1 + du^1, u^2 + du^2) - \vec{x}(u^1, u^2)$$

Haciendo un desarrollo en serie de Taylor se tiene que:

$$\begin{aligned}
\vec{x}(u^1 + du^1, u^2 + du^2) &= \vec{x}(u^1, u^2) + \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^i} du^i + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial u^i \partial u^k} du^i du^k du^i du^k + ... \\
\Rightarrow \vec{x}(u^1 + du^1, u^2 + du^2) &= \vec{x}(u^1, u^2) + d\vec{x} + \frac{1}{2} d^2 \vec{x} + ... \\
\Rightarrow \vec{PQ} &= \vec{x}(u^1 + du^1, u^2 + du^2) - \vec{x}(u^1, u^2) \\
&= d\vec{x} + \frac{1}{2} d^2 \vec{x} + ... \\
\Rightarrow d &= \vec{PQ} \cdot \vec{N} = \left(d\vec{x} + \frac{1}{2} d^2 \vec{x} + ... \right) \cdot \vec{N} \\
&= d\vec{x} \cdot \vec{N} + \frac{1}{2} d^2 \vec{x} \cdot \vec{N} \\
d &= \vec{PQ} \cdot \vec{N} = \frac{1}{2} d^2 \vec{x} \cdot \vec{N} = \frac{1}{2} \aleph = \frac{1}{2} b_{ik} du^i du^k
\end{aligned}$$

Este interesante resultado nos dice que, es muy buena aproximación, el doble de la proyección de $\vec{PQ}$ sobre $\vec{N}$ es $\aleph$, es decir $\aleph$ es aproximadamente el doble de la distancia perpendicular de Q al plano tangente.
La funcion $d = \frac{1}{2}\aleph = \frac{1}{2}\left(b_{11}(du^1)^2 + 2b_{12}du^1du^2 + b_{22}(du^2)^2\right)$ es llamada paraboloide osculador en P.

La naturaleza de este paraboloide determina cualitativamente la naturaleza de la superficie en las vecindades de P.

1.2 Clasificación de puntos sobre una superficie

Dependiendo del signo de l descriminante del determinante de la segunda forma fundamental es posible distinguir tres tipos de puntos sobre una superficie. esto significa que a partir del signo del determinante:

$$b = det(b_{ik}) = b - 11b_{22} - b_{12}^2 = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$$

es posible diferenciar:

1.2.1 Caso elíptico

Un punto es llamado eliptico si $b = det(b_{ik}) = b - 11b_{22} - b_{12}^2 > 0$. En este caso, la segunda forma fundamental $\aleph$ es $\aleph = b_{ij}du^i du^j$ es definida. Esto implica que $\aleph$ asume valores del mismo signo (positivo o negativo) para todo $du^i, du^j \neq 0$.
Si $b > 0 \Rightarrow \aleph$ mantiene el mismo signo.
Como entender esto?
Dado que :

$$\begin{aligned} \left(b_{11}du^1 + b_{12}du^2\right)^2 &= b_{11}^2 du^1 du^1 + 2b_{11}b_{12}du^1 du^2 + b_{12}^2 du^2 du^2 \\ \Rightarrow \aleph &= \frac{1}{b_{11}}\left(b_{11}du^1 + b_{12}du^2\right)^2 + \frac{b}{b_{11}}(du^2)^2 \end{aligned}$$

De aqui vemos que si $b > 0$ entonces el signo de la segunda forma fundamental depende del signo de b_{11}.
Dado que $b_{11} = \vec{x}_{u^1u^1} \cdot \vec{N} = |\vec{x}_{u^1u^1}| \left|\vec{N}\right| \cos\alpha$ (donde α es el angulo entre los dos vectores) se tiene que el signo de b_{11} dependera del sentido de $\vec{N}$ lo que implica que si $b > 0$ entonces $\aleph$ asumira valores del mismo signo, lo que implica que si $b > 0$, $d = \frac{1}{2}\aleph$ será un paraboloide eliptico, lo que implica que en la vecindad de un punto eliptico, la superficie esta en un solo lado del plano tangente en P, lo que implica que P es el único punto común (localmente) entre el plano y la superficie.
Todos los puntos de una esfera y todos los puntos de un elipsoide son ejemplos de puntos elipticos.

1.2.2 Caso hiperbólico

Un punto es llamado hiperbólico cuando $b < 0$. Dado que :

$$\aleph = \frac{1}{b_{11}}\left(b_{11}du^1 + b_{12}du^2\right)^2 - \frac{b}{b_{11}}(du^2)^2$$

Si $b < 0$ y dado que b_{11} puede ser mayor o menor que cero, entonces $\aleph$ no mantiene el mismo signo, lo que implica que $d = \frac{1}{2}\aleph$ es un paraboloide hiperbólico