1 Nociones Previas

En el punto p es posible definir dos vectores unitarios normales a la superficie. Se define:

$$\vec{N} = \frac{\vec{x}_u \times \vec{x}_v}{|\vec{x}_u \times \vec{x}_v|}$$

El cual es unitario perpendicular al plano tangente y varía contínuamente en toda la extención de la carta.

Si $\vec{x} = \vec{x}(u, v)$ y $\vec{x^*} = \vec{x^*}(\theta, \phi)$ son dos cartas que contienen a p entonces:

$$\vec{x^*}_\theta \times \vec{x^*}_\phi = \frac{\partial(u, v)}{\partial(\theta, \phi)}(\vec{x}_u \times \vec{x}_v)$$
$$\Rightarrow \vec{N^*} = \frac{\partial(u, v)}{\partial(\theta, \phi)}\vec{N}$$

Esto implica que $\vec{N^*}$ tiene en p el mismo sentido que $\vec{N}$ si y solo si $\frac{\partial(u,v)}{\partial(\theta,\phi)}$ es mayor que cero.

2 Primera forma fundamental de las superficies

Hemos dicho que una curva de E^3 queda completamente determinada por la curvatura y la torción. De manera análoga una superficie queda univocamente determinada por dos valores locales invariantes conocidos como primera y segunda forma fundamental.
Sea $\vec{x} = \vec{x}(u, v)$ una carta local de clase $C \leq 2$ de una superficie. La diferencial es:

$$d\vec{x} = \frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv = \vec{x}_u du + \vec{x}_v dv$$

Yace en un plano tangente a la superficie en el punto $\vec{x}(u, v)$

Sea $ds = |dx|$ (longitud de arco), entonces

$$
\begin{aligned}
ds^2 &= d\vec{x} \cdot d\vec{x} && (1) \\
&= (\vec{x}_u du + \vec{x}_v dv)(\vec{x}_u du + \vec{x}_v dv) && (2) \\
&= (\vec{x}_u \vec{x}_u)\, dudu + 2\,(\vec{x}_u \cdot \vec{x}_v)\, dudv + (\vec{x}_v \cdot \vec{x}_v)\, dvdv && (3)
\end{aligned}
$$

En la nomenclatura de Monge y Gaussse define $E = \vec{x}_u \vec{x}_u$, $F = \vec{x}_u \cdot \vec{x}_v$ y $G = \vec{x}_v \cdot \vec{x}_v$ lo que implica que la ecuacion (3) se puede escribir como:

$$ds^2 = E(du)^2 + 2F(dudv) + G(dv)^2 \tag{4}$$

Donde E,F y G son llamados los coeficientes de la primera forma fundamental.
La forma bilineal (4) es llamada la primera forma fundamental.

En la nomenclatura de Riemann:

$$ds^2 = g_{11}(du^1)^2 + 2g_{12}(du^1 du^2) + g_{22}(du^2)^2$$

La cual se obtiene haciendo $u^1 = u$ y $u^2 = v$.

$$
\begin{aligned}
g_{11} &= E \\
g_{12} &= F \\
g_{22} &= G
\end{aligned}
$$

lo que imolica que ds^2 puede ser escrito como:

$$ds^2 = \sum_{i,k=1}^{2} g_{ik} du^i du^k = g_{11}(du^1)^2 + 2g_{12}(du^1 du^2) + g_{22}(du^2)^2$$

Segun la convencion de Einstein $ds^2 = g_{ik} du^i du^k$. De esta manera:

$$
\begin{aligned}
g_{11} &= \vec{x}_{u^1} \cdot \vec{x}_{u^1} \\
g_{12} &= \vec{x}_{u^1} \cdot \vec{x}_{u^2} \\
g_{22} &= \vec{x}_{u^2} \cdot \vec{x}_{u^2} \\
\Rightarrow g_{ik} &= \vec{x}_{u^i} \cdot \vec{x}_{u^k}
\end{aligned}
$$

Estos coeficientes g_{ik} son conosidos como coeficientes métricos o métrica de la superficie.
El tensor g_{ik} determina ds^2, el ángulo entre vectores sobre una superficie y el área de la superficie.
De su definición $g_{ik} = \vec{x}_{u^i} \cdot \vec{x}_{u^k}$ vemos que $g_{ik} = g_{ki}$ es simetrico los cuales forman una matriz 2×2

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$$

Cuyo determinanate es:

$$g = det(g_{ik}) = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} = g_{11}g_{22} - g_{12}^2$$

La matriz inversa de g_{ik} es denotada por g^{ik}:

$$\begin{aligned} g_{ij}g^{jk} &= \delta_i^k \\ \Rightarrow\ 2\, g_{11}g_{12}g_{21}g_{22}\, 2\, g^{11}g^{12}g^{21}g^{22} &= 2\,1001 \\ \Rightarrow g^{11} = \frac{g_{22}}{g}\ ;\ g^{12} = g^{21} = -\frac{g_{12}}{g}\ ;\ g^{22} = \frac{g_{11}}{g} & \end{aligned}$$

2.1 Longitud de arco de una curva sobre una superficie

Sea $\vec{x} = \vec{x}(u^1(t), u^2(t))$, $a \leq t \leq b$ un arco dregular situado en una carta $\vec{x} = \vec{x}(u^1, u^2)$. La longitud de arco es:

$$s = \int_a^b ds$$

donde $ds^2 = g_{ik}du^idu^k$, lo que implica que:

$$s = int_a^b\sqrt{g_{ik}du^idu^k} = int_a^b\sqrt{g_{ik}\frac{du^i}{dt}\frac{du^k}{dt}}dt$$

2.2 Ángulos entre vectores

Consideremos el ángulo que forma en el punto $\vec{x}(u^1, u^2)$ las curvas de parámetro u^1 y u^2, es decir el ángulo que forman las tangentes $\vec{x}_{u^1}$, $\vec{x}_{u^2}$.

$$
\begin{aligned}
\vec{x}_{u^1} \quad &\cdot \quad \vec{x}_{u^2} = |\vec{x}_{u^1}||\vec{x}_{u^2}|\cos\theta \\
|\vec{x}_{u^1}| &= \sqrt{\vec{x}_{u^1}\cdot\vec{x}_{u^1}} = \sqrt{g_{11}} \\
|\vec{x}_{u^2}| &= \sqrt{\vec{x}_{u^2}\cdot\vec{x}_{u^2}} = \sqrt{g_{22}} \\
\vec{x}_{u^1} \quad &\cdot \quad \vec{x}_{u^2} = g_{12} \\
\Rightarrow g_{12} &= \sqrt{g_{11}}\sqrt{g_{22}}\cos\theta
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}$$

Teorema: *i) Las lineas coordenadas son mutuamente ortogonales en el punto $\vec{x}(u^1,u^2)$ si y solo si en dicho punto $g_{12}=0$.*
ii) Si las lineas coordenadas son ortogonales en todo punto, entonces las coordenadas curvilineas son ortogonales, lo cual ocurre si y solo si $g_{12}=0$. Esto significa que la primera forma fundamental toma la forma

$$ds^2 = g_{11}(du^1)^2 + g_{22}(du^2)^2$$

2.3 Área de una superficie

Para encontrar el área de un dominio S sobre una superficie $\vec{x}=\vec{x}(u^1,u^2)$ consideramos:

$$
\begin{aligned}
\Delta\vec{x}_1 &= \vec{x}_{u^1}du^1 \\
\Delta\vec{x}_2 &= \vec{x}_{u^2}du^2 \\
\Delta A &= |\Delta\vec{x}_1 \times \vec{x}_2| = |\vec{x}_{u^1}\times\vec{x}_{u^2}|du^1du^2 \\
|\vec{x}_{u^1}\times\vec{x}_{u^2}| &= |\vec{x}_{u^1}||\vec{x}_{u^2}|\sin\theta \\
|\vec{x}_{u^1}| &= \sqrt{g_{11}} \\
|\vec{x}_{u^2}| &= \sqrt{g_{22}} \\
\sin\theta &= \sqrt{1-\cos^2\theta} \\
\cos\theta &= \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} \\
\sin\theta &= \sqrt{1-\frac{g_{12}^2}{g_{11}g_{22}}} = \sqrt{\frac{g_{11}g_{22}-g_{12}^2}{g_{11}g_{22}}}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow |\vec{x}_{u^1} \times \vec{x}_{u^2}| &= \sqrt{g_{11}g_{22}}\sqrt{\frac{g_{11}g_{22}-g_{12}^2}{g_{11}g_{22}}} \\
&= \sqrt{g_{11}g_{22}-g_{12}^2} \\
\Rightarrow \Delta A &= \sqrt{g_{11}g_{22}-g_{12}^2}du^1du^2 = \sqrt{g(u^1,u^2)} \\
\Rightarrow A &= \int \Delta A = \int \sqrt{g(u^1,u^2)}
\end{aligned}$$

Debemos notar que la ecuación para la longitud de arco, ángulo entre curvas y áreas de una superficie son invariantes bajo transformaciones de parámetros, es decir son invariantes bajo reparametrización.

Teorema: *Los coeficientes métricos g_{ik} de la primera forma fundamental de una superficie cambian de la misma forma que las componentes de un tensor covariante de segundo orden.*

$$\underline{g}_{ik} = \frac{\partial u^i}{\partial \underline{u}^j}\frac{\partial u^k}{\partial \underline{u}^l}g_{jl}$$

Donde $\underline{u}^i = \underline{u}^i(u^1,u^2)$ y $\underline{u}^i = \underline{u}^i(u^1,u^2)$

Teorema: *La primera forma fundamental es una forma definida positiva*

$$ds^2 = g_{ik}du^idu^k$$

Demostración:

i) Probemos primero que el determinante del tensor métrico es positiva.

Dado que $(\vec{x}_{u^1} \times \vec{x}_{u^2})^2 > 0$.

Del cálculo vectorial sabemos que $(\varepsilon_{ijk}A_jB_k)^2 = (A_iA_i)(B_iB_i) - (A_iB_i)^2$ luego:

$$\begin{aligned}
(\vec{x}_{u^1} \times \vec{x}_{u^2})^2 &= (\vec{x}_{u^1} \times \vec{x}_{u^2})(\vec{x}_{u^1} \times \vec{x}_{u^2}) \\
&= (\vec{x}_{u^1}\vec{x}_{u^1})(\vec{x}_{u^2}\vec{x}_{u^2}) - (\vec{x}_{u^1}\vec{x}_{u^2})^2 \\
&= g_{11}g_{22} - (g_{12})^2 = g > 0
\end{aligned}$$

ii) Consideremos ahora la primera forma fundamental:

$$ds^2 = g_{ik}du^idu^k = g_{11}du^1du^1 + 2g_{12}du^1du^2 + g_{22}du^2du^2$$