UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Prof. Jorge Ruiz Castillo

1 TECNICAS DE INTEGRACION

1.1 Integración por partes

Teorema.- Sean f y g dos funciones derivables sobre $[a,b]$ de manera que f' y g' sean continuas sobre $[a,b]$. Entonces

$$\int f(x)\,g'(x)\,dx = f(x)\,g(x) - \int f'(x)\,g(x)\,dx$$

Demostración.- Sean $u = f(x)$ y $v = g(x)$, entonces

$$du = f'(x)\,dx \text{ y } dv = g'(x)\,dx.$$

Además

$$d(uv) = udv + vdu$$

por lo tanto

$$\int d(uv) = \int udv + \int vdu$$

$$uv = \int udv + \int vdu$$

Luego

$$\boxed{\int udv = uv - \int vdu}$$

es decir

$$\int f(x)\,g'(x)\,dx = f(x)\,g(x) - \int f'(x)\,g(x)\,dx$$

Observación.- Con las mismas hipótesis del teorema anterior:

$$\int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx = f(x)\,g(x)|_a^b - \int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx$$

Ejemplos.-

1. $\displaystyle\int x^2 \ln x \underset{dv=x^2dx}{\overset{u=\ln x}{=}} \frac{1}{3}x^2 \ln x - \frac{1}{9}x^3 + c$

2. $\displaystyle\int_1^e \ln x dx \underset{dv=\frac{dx}{x}}{\overset{u=\ln x}{=}} x \ln|_1^e - \int_1^e dx = 1$

   Observación.- $\displaystyle\int \ln x dx = x \ln x - x + c$

3. $\displaystyle\int x^2 \sin x dx \underset{dv=\sin x dx}{\overset{u=x^2}{=}} -x^2 \cos x + 2\int x \cos x dx \underset{dv=\cos x dx}{\overset{u=x}{=}}=$

   $$= -x^2 \cos x + 2 \sin x + 2 \cos x + c$$

4. $\displaystyle\int e^{-x} \cos x dx \underset{dv=\cos x dx}{\overset{u=e^{-x}}{=}} e^{-x} \sin x + \int e^{-x} \sin x dx \underset{dv=\sin x dx}{\overset{u=e^{-x}}{=}}$

   $$= e^{-x} \sin x - e^{-x} \cos x - \int e^{-x} \cos x dx$$

   Por lo tanto

   $2\displaystyle\int e^{-x} \cos x dx = e^{-x} \sin x - e^{-x} \cos x$, es decir

   $\displaystyle\int e^{-x} \cos x dx = \frac{1}{2}\left(e^{-x} \sin x - e^{-x} \cos x\right) + c$

5. $\displaystyle\int \sec^3 x dx \underset{dv=\sec^2 x dx}{\overset{u=\sec x}{=}} \sec x \tan x - \int \sec x \tan^2 x dx =$

   $$= \sec x \tan x - \int \sec^3 x \left(\sec^2 x - 1\right) dx$$

   Por lo tanto

   $2\displaystyle\int \sec^3 x dx = \sec x \tan x + \int \sec x dx = \sec x \tan x + \ln|\sec u + \tan u| + c$

   Obtenemos:

   $\displaystyle\int \sec^3 x dx = \frac{1}{2} \sec x \tan x + \frac{1}{2} \ln|\sec u + \tan u| + c$

.

Ejercicios.-

1. Calcule:

   (a) $\int \sin^2 x dx$ (b) $\int \cos^2 x dx$

   Indicación.- $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$ y $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$

2. Demuestre que:

   (a) $\int \sin^n x dx = -\frac{1}{n}\sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x dx;\ n \geq 2$

   Indicación.- $u = \sin^{n-1} x;\ dv = \sin x dx$

   (b) $\int \cos^n x dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x dx;\ n \geq 2$

3. Calcule usando las fómulas anteriores

   (a) $\int \sin^3 x dx$ (b) $\int \cos^4 x dx$

4. Obtenga fórmulas de reducción para

   (a) $\int \sec^n x dx$ (b) $\int \csc^n x dx$

1.2 Integrales trigonométricas

Consideremos primero integrsales de la forma

$$I = \int \sin^m x \cos^n x dx$$

• Si $n = 1$, entonces, $I = \int \sin^m x \cos x dx =^{u=\sin x} \frac{1}{m+1}\sin^{m+1} x + c$
• Si $m = 1$, se procede en forma análoga haciendo $u = \cos x$.
• Si $n > 2$ e impar, entonces $n = 2p+1, p \geq 1$,
$I = \int \sin^m x \cos^{2p} x \cos x dx = \int \sin^m x \left(1-\sin^2 x\right)^p \cos x dx =^{u=\sin x}$

$$= \int u^m \left(1-u^2\right)^p du$$

• Si $n > 2$ e impar, se procede en forma análoga haciendo $u = \cos x$.
• Si n y m son mayores e iguales a 2 y pares, se emplean las fórmulas de reducción del ejercicio 1) anterior o $\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$ para reducir la integral I a otra más simple.

De esta modo quedan resueltas todas las integrales del tipo $I = \int \sin^m x \cos^n x dx$.

Ejemplos.-

1. $\int \sin^5 x \cos^7 x dx = \int \sin x \left(1-\cos^2 x\right)^2 \cos^7 x dx =^{u=\cos x}$

   $= \frac{1}{5}\cos^{10} x - \frac{1}{8}\cos^8 x - \frac{1}{12}\cos^{12} x + c$

2. $\int \sin^4 x \cos^2 x dx = \int (\sin x \cos x)^2 \sin^2 x dx = \frac{1}{8}\int \sin^2 2x (1-\cos 2x) dx$

   $= \frac{1}{8}\int \sin^2 2x dx - \frac{1}{8}\int \sin^2 2x \cos 2x dx = \frac{1}{8}\int \frac{1}{2}(1-\cos 4x) dx -$

   $-\frac{1}{8}\int \sin^2 2x \cos 2x dx = \frac{1}{16}x - \frac{1}{32}\sin 4x - \frac{1}{8}\int \sin^2 2x \cos 2x dx =^{u=\sin 2x}$

   $= \frac{1}{16}x - \frac{1}{32}\sin 4x - \frac{1}{24}\sin^3 2x + c$

   Alternativa.- $\sin^4 x \cos^2 x = \sin^4 x \left(1-\sin^2 x\right) = \sin^4 x - \sin^6 x$. Puede usar las fórmulas de reducción de la sección anterior.

.

Consideramos ahora integrales de la forma $I = \int \tan^m x \sec^n x dx$. Se procede en forma análoga al caso anterior de acuerdo a si n o m es par o impar.

Ejemplos.-

1. $\int \tan^5 x dx = \int \tan^3 x \left(\sec^2 x - 1\right) dx = \int \tan^3 x \sec^2 x dx - \int \tan^3 x dx =$

$$= \int \tan^3 x \sec^2 x dx - \int \tan x \left(\sec^2 x - 1\right) dx =$$

$$= \int \tan^3 x \sec^2 x dx - \int \tan x \sec^2 x dx + \int \tan x dx =^{u=\tan x}$$

$$= \tfrac{1}{4}\tan^4 x - \tfrac{1}{2}\tan^2 x + \int \frac{\sin x}{\cos x} dx =^{u=\cos x} \frac{1}{4}\tan^4 x - \frac{1}{2}\tan^2 x - \ln|\cos x| + c$$

2. $\int \sec^4 2x dx = \int \sec^2 2x \sec^2 2x dx = \int \sec^2 2x \left(1 + \tan^2 2x\right) dx =$

$$= \int \sec^2 2x dx + \int \sec^2 2x \tan^2 2x dx =^{u=\tan x} \frac{1}{2}\tan^2 2x + \frac{1}{6}\tan^2 2x + c$$

3. $\int \tan^3 3x \sec^4 3x dx = \int \tan 3x \left(\sec^2 3x - 1\right) \sec^4 3x dx =$

$$= \int \tan 3x \sec 3x \sec^5 3x dx - \int \tan 3x \sec 3x \sec^3 3x dx =^{u=\sec 3x}$$

$$= \tfrac{1}{18}\sec^6 3x - \tfrac{1}{12}\sec^4 3x + c$$

Alternativa.- $\tan^3 3x \sec^4 3x = \tan^3 3x \left(1 + \tan^2 3x\right) \sec^2 3x =$

$= \tan^3 3x \sec^2 3x + \tan^5 3x \sec^2 3x$ hacemos $u = \tan 3x$

4. $\int \tan^4 x \sec^4 x dx = \int \tan^4 x \left(1 + \tan^2 x\right) \sec^2 x dx = \int \tan^4 x \sec^2 x dx +$

$$+ \int \tan^6 x \sec^2 x dx =^{u=\tan x} \frac{1}{5}\tan^5 x + \frac{1}{7}\tan^7 x + c$$

5. $\int \frac{\tan^5 x}{\sec^2 x} dx = \int \frac{\left(1 - \cos^2 x\right)^2}{\cos^3 x} \sin x dx =^{u=\cos x} \frac{1}{2\cos^2 x} + 2\ln|\cos x| + c$

Alterrnativa.- $\frac{\tan^5 x}{\sec^2 x} = \frac{\tan x \sec x \left(\sec^2 x + 1\right)^2}{\sec^3 x}$ hacemos $u = \sec x$.

.

Ahora para integrasles de la forma $I = \int \cot^m x \csc^n x dx$ se procede en forma similar.

Para integrales de la forma $I = \int \sin ax \cos bx dx$ $(a \neq b)$ utilizamos la identidad

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)\right]$$

con lo que la integral queda

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}\int \sin(a-b) x dx + \frac{1}{2}\int \sin(a+b) x dx \\ &= -\frac{1}{2(a-b)}\cos(a-b)x - \frac{1}{2(c+b)}\cos(a+b)x + c \end{aligned}$$

Ejemplo.- $\int \cos 2x \sin 3x dx = \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{10}\cos 5x + c$

Para integrales de la forma $\int \sin ax \sin bx dx$ o $\int \cos ax \cos bx dx$ se procede en forma análoga utilizando las siguientes identidades

$$\begin{aligned} \sin\alpha\sin\beta &= \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)\right] \\ \cos\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)\right] \end{aligned}$$

1.3 Sustituciones trigonométricas

Para integrales que contengan raíces o potencias de $a^2 - x^2$ con $a > 0$, podemos hacer $x = a\sin u, -\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{\pi}{2}$, de manera que $dx = a\cos u du$. Note por otra parte que $\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2\left(1-\sin^2 u\right)} = |a\cos u| = a\cos u$.

Ejemplo.- $\displaystyle\int \frac{9-4x^2}{x}dx =^{x=\frac{3}{2}\sin u} \int \frac{\sqrt{9\left(1-\sin^2 u\right)}\frac{3}{2}\cos u}{\frac{3}{2}\sin u}dx =$

$$= 3\int \frac{1-\sin^2 u}{\sin u}du = 3\int \csc u du - 3\int \sin u du =$$

$$= 3\int \frac{\csc^2 u - \csc u \cot u}{\csc u - \cot u}du + 3\cos u + c =^{z=\csc u - \cot u}$$

$$= 3\ln\left|\csc\left(\arcsin \tfrac{2}{3x}\right) - \cot\left(\arcsin \tfrac{2}{3x}\right)\right| + \sqrt{9-4x^2} + c =$$

$$= 3\ln\left|\tfrac{3-\sqrt{9-4x^2}}{x}\right| + \sqrt{9-4x^2} + c$$

Ejercicio.- Calcular $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-4x^2}dx$ (R: $I = \frac{\pi}{8}$)

Para integrales que contengan raíces o potencias de $x^2 + a^2$ con $a > 0$, podemos hacer $x = a\tan u$, con $-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$, de manera que $dx = a\sec^2 u du$. Note además que $\sqrt{x^2+a^2} = a|\sec u| = a\sec u$.

Ejemplo.- $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4+x^2}}dx =^{x=2\tan u} \int \frac{\cos u}{\sin^2 u}du =^{z=\sin u} -\frac{\sqrt{4+x^2}}{4x} + c$

Para integrales que contengan raíces o potencias de $x^2 - a^2$ con $a > 0$, podemos hacer $x = a\sec u$, con $0 \leq u < \frac{\pi}{2}$ o $\pi \leq u < \frac{3\pi}{2}$, de manera que $dx = a\sec u \tan u$. Note que $\sqrt{x^2-a^2} = a|\tan u| = a\tan u$.

Ejemplos.-

1. $\displaystyle\underset{C}{\int} \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-4}}dx =^{x=2\sec u} 4\int \sec^3 u du = 2\sec u\tan u + 2\ln|\sec u + \tan u| +$

   $$= 2x\sqrt{x^2-4} + 2\ln\left|x + \sqrt{x^2-4}\right| + c$$

   Nota .- Para $\displaystyle\int \sec^3 u du$ ver ejemplo 5. de la primera sección.

2. $\displaystyle\int_{-6}^{-3} \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}dx =^{x=3\sec u} -3\int_{\frac{4\pi}{3}}^{\pi} \tan^2 u du = \pi - 3\sqrt{3}$

.

Para integrales que contengan raíces o potencias de $bx^2 + cx + d$, completamos cuadrados de manera que formamos expresiones del tipo $a^2 - x^2$ o $x^2 + a^2$ o $x^2 - a^2$ con $a > 0$ para posteriormente aplicar una de las tres sustituciones anteriores según corresponda.

Ejemplo.-

$$\int \frac{dx}{(4x^2-27x+27)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{dx}{\left(4\left(x\_3\right)^2 - 9\right)^{\frac{3}{2}}} =^{x-3=\frac{3}{2}\sec u} \frac{1}{18}\int \frac{\sec u}{\tan^2 u}du =$$

$$= \tfrac{1}{18}\int \csc u du = \frac{1}{18}\ln|\csc u - \cot u| + c = -\frac{1}{9}\frac{x-3}{\sqrt{4x^2-27x+27}} + c$$

1.4 Fracciones Parciales

Utilizamos la técnica de descomposición en fracciones parciales para el cálculo de integrales de funciones racionales.

Ejemplo.- $\frac{x+1}{x^3+x^2-6x} = \frac{x+1}{x(x-2)(x+3)} = -\frac{1}{6}\frac{1}{x} + \frac{3}{10}\frac{1}{x-2} - \frac{2}{15}\frac{1}{x+3}$

Por lo tanto

$$\int \frac{x+1}{x^3+x^2-6x}dx = -\frac{1}{6}\int \frac{1}{x}dx + \frac{3}{10}\int \frac{1}{x-2}dx - \frac{2}{15}\int \frac{1}{x+3}dx =$$

$$= -\tfrac{1}{6}\ln|x| + \tfrac{3}{10}\ln|x-2| 1 - \tfrac{2}{15}\ln|x+3| + c$$

1.5 Sumas de Riemann y la integral de Rieman

Sumas de Riemann.- Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua y sea $\mathcal{P}$ una patición del intervalo $[a, b]$, $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$. Para cada $k = 1, 2, ..., n$, sean m_k y M_k el valor mínimo y máximo de f (respectivamente) sobre $[x_{k-1}, x_k]$. La suma inferior $L_f(\mathcal{P})$ y la suma superior $U_f(\mathcal{P})$ de f con respecto a la partición $\mathcal{P}$ están definidas por:

$$\begin{aligned} L_f(\mathcal{P}) &= m_1 \triangle x_1 + m_2 \triangle x_2 + ... + m_n \triangle x_n \\ U_f(\mathcal{P}) &= M_1 \triangle x_1 + M_2 \triangle x_2 + ... + M_n \triangle x_n \end{aligned}$$

La integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ es por definición el único número que satisface $L_f(\mathcal{P}) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq U_f(\mathcal{P})$ para cada partición $\mathcal{P}$ del intrvalo $[a, b]$.
Recordemos también que si f es una función continua podemos escribir: $\int_a^b f(x)\,dx = \sup_{\mathcal{P}\in\pi[a,b]} \{L_f(\mathcal{P})\}$ o bien $\int_a^b f(x)\,dx = \inf_{\mathcal{P}\in\pi[a,b]} \{U_f(\mathcal{P})\}$, donde $\pi[a, b]$ es la colección de todas las particiones del intervalo $[a, b]$.

Definición.- Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función y sea $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ una partición del intervalo $[a, b]$. Para cada $k = 1, 2, ..., n$ sea t_k un número arbitrario en $[x_{k-1}, x_k]$. Entonces la suma

$$f(t_1) \triangle x_1 + f(t_2) \triangle x_2 + ... + f(t_n) \triangle x_n$$

es llamada suma de Riemann de f sobre $[a, b]$ y es denotada por $\sum_{k=1}^{n} f(t_k) \triangle x_k$.
Para cualquier elección de t_k se tendrá

$$m_k \leq f(t_k) \leq M_k$$

Luego
$$L_f(\mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{n} m_k \triangle x_k \leq \sum_{k=1}^{n} f(t_k) \triangle x_k \leq \sum_{k=1}^{n} M_k \triangle x_k \leq U_f(\mathcal{P})$$

Puesto que $L_f(\mathcal{P})$ y $U_f(\mathcal{P})$ sirven para aproximar a la integral $\int_a^b f(x)\,dx$, entonces cualquier suma de Riemann de f sobre $[a, b]$ también es una aproximación de la misma, es decir

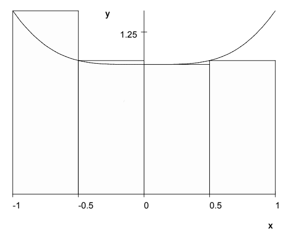
$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{k=1}^{n} f(t_k) \triangle x_k$$

donde $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, ..., n$.

Ejemplo.- Considere la partición $\mathcal{P} = \left\{-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\right\}$ del intervalo $[-1, 1]$. aproxime $\int_{-1}^{1} \sqrt{1 + x^4}dx$ mediante sumas de Riemann, usando las siguientes elecciones para t_k:

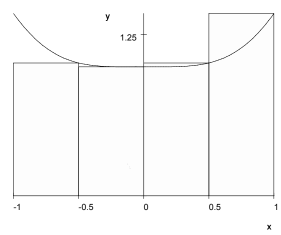
1. $t_k = x_{k-1}$
2. $t_k = x_k$
3. $t_k = \frac{x_{k-1}+x_k}{2}$
4. $t_k = m_k$
5. $t_k = M_k$
   donde $x_0 = -1, x_1 = -\frac{1}{2}, x_3 = \frac{1}{2}, x_4 = 1; m_k$y M_k son los valores de mínimo y de máximo de $f(x) = \sqrt{1 + x^4}$ sobre el intrvalo $[x_{k-1}, x_k]$.
   Solución.- $n = 4$ y $\triangle x_k = x_k - x_{k-1} = \frac{1}{2}; k = 1, 2, 3, 4.$

1. $\sum_{k=1}^{4} f(t_k) \triangle x_k = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} + \sqrt{\frac{17}{16}} + 1 + \sqrt{\frac{17}{16}}\right) \approx 2.23788$

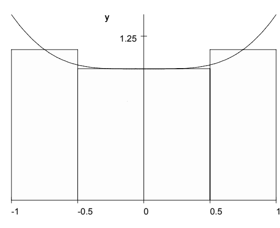


2. $\sum_{k=1}^{4} f(t_k) \triangle x_k = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{17}{16}} + 1 + \sqrt{\frac{17}{16}} + \sqrt{2}\right) \approx 2.23788$

$\sqrt{1+x^4}$



3. $\sum_{k=1}^{4} f(t_k) \triangle x_k = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{337}{256}} + 1 + \sqrt{\frac{257}{256}} + \sqrt{\frac{257}{256}} + \sqrt{\frac{337}{256}}\right) \approx 2.14930$



4. $L_f(\mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{4} m_k \triangle x_k = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{17}{16}} + 1 + 1 + \sqrt{\frac{17}{16}}\right) \approx 2.03078$

5. $U_f(\mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{4} M_k \triangle x_k \approx 2.44499$

.

Observación.- Para elecciones diferentes de los de $t_1, t_2, ..., t_n$ corresponden distintos valores de la suma de Riemann. Podemos distingir algunas elecciones de los $t_k, k = 1, 2, ..., n$. Si t_k es el extremo izquierdo del subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$ como en el ejemplo 1) anterior, llamamos suma izquierda a la suma de Riemann asociada a esta elección. Análogamente definiumos la suma derecha y suma media ilustradas en el ejemplo anterior partes 2) y 3) respectivamente.

Teorema.-Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua. Dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ una partición del intervalo $[a, b]$ cuyos subintervalos tienen longitud menor que δ y si $x_{k-1} \leq t_k \leq x_k, k = 1, 2, ..., n$; entoncesla suma de Riemann satisface la desigualdad

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx - \sum_{k=1}^{n} f(t_k) \triangle x_k \right| < \varepsilon$$

lo que se escribe

$$\boxed{\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\|\mathcal{P}\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(t_k) \triangle x_k}$$

donde $\|\mathcal{P}\| \to 0$indica como la longitud de todos los suintervalos tiende a cero.

Ejemplo.- Aproximar $\ln 2 = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x} dx$ utilizando las particiones $\mathcal{P}_1 = \left\{1, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, 2\right\}$, $\mathcal{P}_2 = \left\{1, \frac{6}{5}, \frac{7}{5}, \frac{8}{5}, \frac{9}{5}, 2\right\}$ y $\mathcal{P}_3 = \left\{1, \frac{11}{10}, \frac{12}{10}, \frac{13}{10}, \frac{14}{10}, \frac{15}{10}.\frac{16}{10}, \frac{17}{10}, \frac{18}{10}\frac{19}{10}, 2\right\}$ tomando el extremo izquierdo como t_k.

Solución.- Para $\mathcal{P}_1$.- $\displaystyle\sum_{k=1}^{3} f(x_{k-1}) \triangle x_k = f(1)\frac{1}{3} + f\left(\frac{4}{3}\right)\frac{1}{3} + f\left(\frac{5}{3}\right)\frac{1}{3} \approx 0.783333$

. Para $\mathcal{P}_2$.-

. $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} f(x_{k-1}) \triangle x_k = \left[f(1) + f\left(\frac{6}{3}\right) + f\left(\frac{7}{3}\right) + f\left(\frac{8}{5}\right) + f\left(\frac{9}{5}\right)\right]\frac{1}{3} \approx 0.745635$

. Para $\mathcal{P}_3$.- $\displaystyle\sum_{k=1}^{10} f(x_{k-1}) \triangle x_k \approx 0.718771$

Observación.-

1. Los cálculos muestran quemientras más son los subintervalos mejor es la aproximación, sin embargo ninguna es exacta. Un amejor aproximación para $\ln 2$ es 0.693147.

2. Si f es continua sobre $[a, b]$ y $\mathcal{P}$ es una partición del intervalo $[a, b]$. El n-ésimo error al usar la suma de Riemann $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(t_k) \triangle x_k$ en lugar de $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ es

$$E_n = \left| \int_a^b f(x)\,dx - \sum_{k=1}^{n} f(t_k) \triangle x_k \right|$$

   El error E_n depende de $\mathcal{P}$ y de los t_k.
   En el ejemplo anterior:

$$E_3 = |0.693147 - 0.783333| = 0.090186$$
$$E_5 = |0.693147 - 0.745635| = 0.052488$$
$$E_{10} = |0.693147 - 0.745635| = 0.025624$$

3. Bajo ciertas condiciones para f y $\mathcal{P}$, hay una manera de encontrar una cota superior para el error E_n. Si $(\forall x \in [a, b]) \left|f'(x)\right| \leq M$ y $\mathcal{P}$ divide al intervalo $[a, b]$ en n subintervalos de longitud $\frac{b-a}{n}$, entonces

$$\boxed{E_n \leq \frac{M(b-a)^2}{n}}$$

.

Ejemplo.- Encontrar un número n que garantice un error menor que 0.001 en la aproximación de $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x} dx$.

Solución.- $\frac{M(b-a)^2}{n} \leq 0.001$
$(\forall x \in [1, 2]) \left|f'(x)\right| = \frac{1}{x^2} \leq 1$
$b - a = 1$

Por lo tanto
$\frac{1}{n} \leq 0.001$ y $n \geq 1000$
es decir para $n = 1000$, $E_n \leq 0.001$.

Definición.- Sean $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función y L un número real. Si dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que cualquiera sea la partición $\mathcal{P}$ de $[a, b]$ con longitud de los subintervalos menor que δ

$$\left| L - \sum_{k=1}^{n} f(t_k) \triangle x_k \right| < \varepsilon$$

con $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$; $k = 1, 2, ..., n$. Entonces diremos que f es integrable Riemann sobre $[a, b]$ y escribimos

$$\int_a^b f(x)\,dx = L$$

Observación.- El teorema anterior muestera que toda función continua sobre $[a, b]$ es integrable Riemann.

Definición.- Se dice que f es seccionalmente continua sobre $[a, b]$ si f es continua sobre $[a, b]$ salvo en un número finito de puntos $a_1, a_2, ..., a_n$ de $]a, b[$ donde f tiene límites laterales finitos.

Observación.- Si f es seccionalmente continua sobre $[a, b]$, entonces f es continua sobre $[a, a_1], [a_1, a_2], ... [a_{n-1}, a_n], [a_n, b]$. Luego f es integrable Riemann sobre cada uno de estos intervalos.

Definición.- Sea f una función seccionalmente continua sobre el intervalo $[a, b]$ y sean $a_1, a_2, ..., a_n$ los puntos de discontinuidad de f. Se define la integral de Riemann de f por

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{a_1} f(x)\,dx + \int_{a_1}^{a_2} f(x)\,dx + ... + \int_{a_1}^{b} f(x)\,dx$$

Ejemplo.- Encontrar $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx$ si $f(x) = \begin{cases} x^2 & , \quad 0 \le x < 1 \\ 2 & , \quad x = 1 \\ \frac{1}{2}x & , \quad 1 < x \le 2 \end{cases}$

Solución.- $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx = \frac{13}{12}$

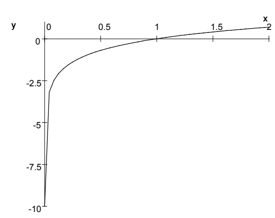
1.6 INTEGRALES IMPROPIAS

Una integral definida cuya integranda es no acotada o su intervalo de integración es no acotado se llama integral impropia. se distingen dos casos.

1^{er} caso) Integranda no acotada.- Diremos que f es no acotada en una vecindad de x_0 si f no es acotada sobre un intervalo $]x_0, b[, b > x_0$; o sobre un intervalo $]a, x_0[, a < x_0$.

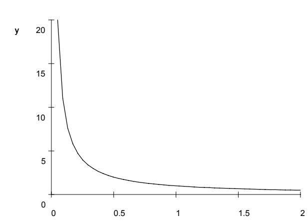
Ejemplos.-

1. $g(x) = \ln x, 0 < x \le 2$



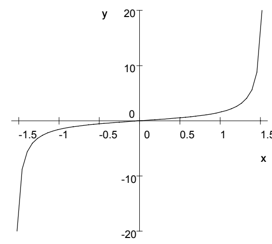
   es no acotada cerca de $x_0 = 0$.

2. $f(x) = \frac{1}{x}, 0 < x < 2$



   es no acotada cerca de $x_0 = 0$.

3. $h(x) = \tan x, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$



es no acotada cerca de $x_0 = -\frac{\pi}{2}$ y cerca de $x_1 = \frac{\pi}{2}$.

.

Sea f continua sobre $]a, b]$ y no acotada cerca de a, entonces f es continua sobre $[c, b]$, $a < c < b$ y para cada $c \in]a, b[$, $\int_c^b f(x)\,dx$ existe.

$$\lim_{c \to a^+} \int_c^b f(x)\,dx$$

existe, definimos:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c \to a^+} \int_c^b f(x)\,dx$$

y diermos que la integral converge. En caso contrario diremos que la integral diverge.

Si f es no negativa y $\int_a^b f(x)\,dx$ diverge, diremos que el área bajo la curva de ecuación $y = f(x)$ y el eje x es infinita y se escribe

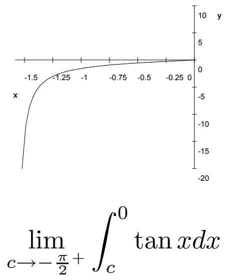
$$\int_a^b f(x)\,dx = +\infty$$

Ejemplos.-

1. $$\int_3^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-3}} = \lim_{c \to 3^+} \int_c^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-3}} = \lim_{c \to 3^+} \frac{3}{2}(x-2)^{\frac{2}{3}} \setminus_c^4 =$$
$$= \tfrac{3}{2} \lim_{c \to 3^+} \left[1 - (c-3)^{\frac{2}{3}}\right] = \tfrac{3}{2}$$
   Por lo tanto $\int_3^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-3}}$ converge (cv).

2. $$\int_1^2 \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{c \to 1^+} \int_c^2 \frac{dx}{x \ln x} =^{u=\ln x} \lim_{c \to 1^+} \int_{\ln c}^{\ln 2} \frac{du}{u} =$$
$$= \lim_{c \to 1^+} [\ln|\ln 2| - \ln|\ln c|] = +\infty$$
   Por lo tanto $\int_1^2 \frac{dx}{x \ln x}$ diverge (dv).

3. Calcular el área encerrada por el eje x, y el gráfico de la curva de ecuación $f(x) = \tan x, -\frac{\pi}{2} < x < 0$.
   Solución.-



$$Area\,(R) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 |f(x)|\,dx = -\lim_{c \to -\frac{\pi}{2}^+} \int_c^0 \tan x dx = +\infty.$$

.

Si f es continua sobre $[a, b[$ y no acotada cerca de b, se define

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)\,dx$$

si el límite existe y diverge en caso contrario.

Ejemplo.- $\displaystyle\int_3^4 \frac{dx}{(t-4)^2} = \lim_{c \to 4^-} \int_3^c \frac{dx}{(t-4)^2} = +\infty$

Luego el área de la región R es infinita.

Si f es continua sobre $]a, b[$, no acotada cerca de a y no acotada cerca de b, se define

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^d f(x)\,dx + \int_d^b f(x)\,dx$$

donde d es un número fijo en $]a, b[$. Diremos que $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ converge si ambas integrales de la derecha convergen y que divergen en caso contrario.

Ejemplo.- $\displaystyle\int_0^1 \frac{3x^2-1}{\sqrt[3]{x^3-x}}dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{3x^2-1}{\sqrt[3]{x^3-x}}dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{3x^2-1}{\sqrt[3]{x^3-x}}dx$

$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{3x^2-1}{\sqrt[3]{x^3-x}}dx = \frac{3}{8}(-1)^{\frac{2}{3}}\sqrt[3]{9}$ y $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{3x^2-1}{\sqrt[3]{x^3-x}}dx = -\frac{3}{8}(-1)^{\frac{2}{3}}\sqrt[3]{9}$

Por lo tanto $\displaystyle\int_0^1 \frac{3x^2-1}{\sqrt[3]{x^3-x}}dx = 0$ (cv)

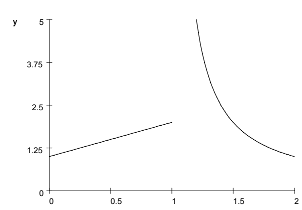
Si f es continua sobre $[a, b]$ salvo en el punto $d \in]a, b[$, en el cual f no es acotada, se define

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^d f(x)\,dx + \int_d^b f(x)\,dx$$

y diremos que $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ converge si ambas integrales de la derecha convergen y que divergen en caso contrario.

Ejemplo.- Calcule $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx$, si $f(x) = \begin{cases} x+1 & , \quad 0 \le x \le 1 \\ \frac{1}{x-1} & , \quad 1 < x \le 2 \end{cases}$

Solución.-



$\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^2 f(x)\,dx$

$\displaystyle\int_1^2 f(x)\,dx = \int_1^2 \frac{1}{x-1}dx = +\infty$ (dv)

Por lo tanto $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx$ diverge.

2^{do} caso) Si f es continua sobre $[a, +\infty[$ (respectivamente sobre $]-\infty, b]$), entonces (respectivamente) también es llamada integral impropia y diremos que converge si el límite siguiente

$$\lim_{R \to +\infty} \int_a^R f(x)\,dx \text{ (respectivamente)}$$

existe y diremos que diverge en caso contrario.

Escribimos: $f(x)\,dx = \lim\limits_{R\to+\infty}\int_a^R f(x)\,dx$

(respectivamente $\displaystyle\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{R\to-\infty}\int_R^b f(x)\,dx$)

Ejemplos.-

1. $$\int_2^{+\infty}\frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}} = \lim_{R\to+\infty}\int_2^R \frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}} =^{t=\sec x} \lim_{R\to+\infty}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\operatorname{arcsec} R} dx =$$
$$= \lim_{R\to+\infty}\left(\operatorname{arcsec} R - \tfrac{\pi}{3}\right) = \tfrac{\pi}{6}$$
   Por lo tanto converge.

   Ejercicio.- Estudiar la convergencia de $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}}$.

2. Calcule el área de la región R encerrada por el gráfico de la función definida por $f(x) = 2^{-x}$ y el eje $x, x \geq 1$.

   Solución.-
$$Area\,(R) == \int_1^{+\infty} 2^{-x}dx = \lim_{R\to+\infty}\int_1^R 2^{-x}dx =$$
$$= \lim_{R\to+\infty}\left[-\tfrac{1}{\ln 2}2^{-x}\right]_1^R = \tfrac{1}{\ln 4}$$

Si f es continua sobre $]-\infty,+\infty[$ diremos que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ converge si $\displaystyle\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ y $\displaystyle\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ ambas convergen para a fijo en $\mathbb{R}$ y en tal caso se define:
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$$
En caso contrario se dice que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ diverge.

Ejemplos.-

1. $$\int_{-\infty}^{+\infty}\cos x dx = \int_{-\infty}^{0}\cos x dx + \int_{0}^{+\infty}\cos x dx$$
$$\int_{0}^{+\infty}\cos x dx = \lim_{R\to+\infty}\int_0^R \cos x dx = \lim_{R\to+\infty}[\sin R]\text{: Este límite no existe.}$$
   Por lo tanto $\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\cos x dx$ diverge y luego $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\cos x dx$ diverge.

2. $$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{e^x+e^{-x}}dx = \int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{e^x+e^{-x}}dx + \int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{e^x+e^{-x}}dx$$
$$\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{e^x+e^{-x}}dx = \lim_{R\to+\infty}\int_0^R\frac{dx}{e^x+e^{-x}}dx = \lim_{R\to+\infty}\left[\arctan(e^x)\right]_0^R =$$
$$= \tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{4}\pi = \tfrac{\pi}{4}$$
   De la misma manera:
$$\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{e^x+e^{-x}}dx = \lim_{R\to-\infty}\int_R^0\frac{dx}{e^x+e^{-x}}dx = \frac{\pi}{4}$$
   Por lo tanto $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{e^x+e^{-x}}dx = \frac{\pi}{2}$ (cv).

.

Si f es continua sobre $]a,+\infty[$ (respectivamente sobre $]-\infty,b[$) y no es acotada cerca de a (respectivamente es no acotada cerca de b), se define:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^{+\infty} f(x)\,dx$$

donde $c>a$ es un número fijo.
(respectivamente

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^c f(x)\,dx + \int_c^{b} f(x)\,dx$$

donde $c<b$ es un número fijo).
Diremos en cada caso que la integral de la izquierda converge si ambas integrales de la derecha convergen o que diverge en caso contrario.

<u>Ejemplo</u>.- $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2-1}=\int_1^3\frac{dx}{x^2-1}+\int_3^{+\infty}\frac{dx}{x^2-1}$

$$\int_1^3\frac{dx}{x^2-1}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{1+\varepsilon}^3\frac{dx}{x^2-1}=\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\ln\frac{x-1}{x+1}\right]_{1+\varepsilon}^3=$$
$$=\tfrac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\ln\tfrac{1}{2}-\ln\tfrac{\varepsilon}{\varepsilon+2}\right)=+\infty$$

Por lo tanto $\displaystyle\int_1^3\frac{dx}{x^2-1}$ diverge y luego $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2-1}$ diverge.

Cualquier otro caso que se presente es una reiteración de los casos señalados anteriormente, por lo que se procede de manera similar a los ilustrados reiterando el proceso tantas veces como sea necesario.

<u>Ejemplo</u>.- Decida si converge la integral impropia $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ si $f(x)=$
$$\begin{cases} xe^{-x^2} & , \quad x\le 0\\ 3x^2-2 & , \quad 0<x\le 3\\ \frac{1}{x^2-1} & , \quad x>3\end{cases}$$

<u>Solución</u>.- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx+\int_{0}^{3} f(x)\,dx+\int_{3}^{+\infty} f(x)\,dx=$
$$=\int_{-\infty}^0 xe^{-x^2}dx+\int_0^3\left(3x^2-2\right)dx+\int_3^{+\infty}\frac{1}{x^2-1}dx=$$
$$=-\tfrac{1}{2}+21+\tfrac{1}{2}\ln 4-\tfrac{1}{2}\ln 2=\tfrac{1}{2}\ln 2+\tfrac{41}{2}$$

<u>Observación</u>.- $\displaystyle\int_0^2\frac{dx}{(x-1)^3}=\int_0^1\frac{dx}{(x-1)^3}+\int_1^2\frac{dx}{(x-1)^3}$ diverge. Sin embargo $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{(x-1)^3}+\int_{1+\varepsilon}^2\frac{dx}{(x-1)^3}\right]=-1.$

<u>Teorema</u> (criterio de comparación).- Sean $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ dos funciones no negativas de modo que $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ y $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ sean impropias. Si $(\forall x\in[a,b])\; f(x)\le g(x)$ se tiene:

1. $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ converge, entonces $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ converge.
2. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ diverge, entonces $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ diverge.

<u>Demostración</u>.-

1. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ converge o diverge a $+\infty$ (ya que $f(x)\ge 0$ para $x\in[a,b]$). Puesto que $f(x)\le g(x)\,,x\in[a,b]$, entonces por propiedades del límite se tiene:
$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx\le\int_a^b g(x)\,dx<+\infty$
Por lo tanto $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ converge.

2. La demostración es análoga. Ejercicio.

.

Ejemplo.- Estudie la convergencia de las siguientes integrales:

1. $\displaystyle\int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{x^4-1}}$ 2. $\displaystyle\int_3^6 \frac{\ln x}{(x-3)^4}dx$

Solución.-

1. Para $x > 1 : x^4 > x$

$$x^4 - 1 > x - 1$$
$$\sqrt{x^4-1} > \sqrt{x-1}$$
$$0 \leq \frac{1}{\sqrt{x^4-1}} < \frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

$\displaystyle\int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$ converge (verificarlo)

Por lo tanto $\displaystyle\int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{x^4-1}}$ converge (criterio de comparación).

2. Para $x > 3 : \ln x > 1$

$$\frac{\ln x}{(x-3)^4} > \frac{1}{(x-3)^4} \geq 0$$

$\displaystyle\int_3^6 \frac{1}{(x-3)^4}dx$ diverge (verificarlo). Luego poe criterio de comparación

$\displaystyle\int_3^6 \frac{\ln x}{(x-3)^4}dx$ diverge.

Corolario 1.- Sean $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ dos funciones de modo que $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ y $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ sean impropias. Si $(\forall x \in [a,b])\, f(x) \leq g(x) \leq 0$, se tiene:

1. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ converge, entonces $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ converge.

2. $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ diverge, entonces $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ diverge.

Demostración.-

$0 \leq -g(x) \leq f(x)$

Basta aplicar el teorema anterior a $-f(x)$ y $-g(x)$. Además debe considerar que

$$\int_a^b -h(x)\,dx = -\int_a^b h(x)\,dx.$$

Corolario 2.- Supongamos que $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ es una integral impropia.

Si $\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,dx$ converge, entonces $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.

Demostración.-

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|.$$

Ejemplo.- Estudie la convergencia de $\displaystyle\int_0^{4\pi} \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x-\pi}}dx$

Solución.-

$$\left|\frac{\sin x}{\sqrt[3]{x-\pi}}\right| \leq \frac{1}{\sqrt[3]{|x-\pi|}}, \pi \leq x \leq 4\pi$$

$\displaystyle\int_0^{4\pi} \frac{dx}{\sqrt[3]{|x-\pi|}}$ converge (verificarlo). Por lo tanto

$\displaystyle\int_0^{4\pi} \left|\frac{\sin x}{\sqrt[3]{x-\pi}}\right| dx$ converge (criterio de comparación).

Luego $\displaystyle\int_0^{4\pi} \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x-\pi}}dx$ converge.

Observación.- Los mismos resultados anteriores siguen siendo válidos si las integrales impropias son del 2^o tipo; es decir, si son integrales sobre intervalos no acotados.

Ejemplo.- Determine si $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+1}dx$ es convergente.

Solución.- $\left|\frac{\cos x}{x^2+1}\right| \leq \frac{1}{x^2+1}$, $x \geq 0$.
$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}dx$ converge (verificarlo). Por lo tanto
$\displaystyle\int_0^{+\infty} \left|\frac{\cos x}{x^2+1}\right| dx$ converge (criterio de comparación).
Luego $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+1}dx$ converge.

.
Cálculo I y II - 521141
JRC
14 de Agosto de 2005