UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CS. FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

CCS/ccs 19/05/2005

EJERCICIOS DE REPASO (SOLUCIONES)
Cálculo I y II (520141)
Christian Cardoso S.

1. Decidir, justificando adecuadamente, si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

   a) (*Certamen de Recuperación Nº2. 2004*) Si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ y $\{b_n\}_{n=m}^{\infty}$ es acotada, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.

   Solución propuesta:
   Hipótesis:
   $\{b_n\}_{n=m}^{\infty}$ es acotada $\Rightarrow \exists\ M > 0$ tal que $|b_n| \leq M$.
   $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Rightarrow$ Dado $\varepsilon > 0$, $\exists\ N \in \mathbb{N}$ tal que, si $n \geq N$, entonces $|a_n| < \dfrac{\varepsilon}{M}$.

   Tesis: $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$

   En efecto, para el $\varepsilon > 0$ dado en la hipótesis, $\exists\ N \in \mathbb{N}$ tal que, si
   $n \geq N \Rightarrow |a_n b_n| = |a_n||b_n| < \dfrac{\varepsilon}{M} M = \varepsilon$.

   Por lo tanto, la afirmación es verdadera $\blacksquare$

   b) (*Certamen Nº2. 2004*) Si $a_n = \dfrac{3n^\alpha}{n^4+1}$, entonces $(a_n)_{n\geq 1}$ converge para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

   Solución propuesta:
   Para $\alpha = 5$ se tiene que $a_n = \dfrac{3n^5}{n^4+1}$ y
   $$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^5}{n^4+1} = \lim_{n\to\infty} n \cdot \frac{3}{1+\frac{1}{n^4}} = +\infty, \text{ diverge.}$$
   Por lo tanto, la afirmación es falsa $\blacksquare$

   c) (*Certamen Nº2. 2004*) La sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$, con $a_1 = 1$ y $a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{n}$ es monótona creciente.

   Solución propuesta:
   $\forall\ n \geq 1$: $a_{n+1} - a_n = \dfrac{1}{n} > 0 \Rightarrow a_n < a_{n+1}$.

   Por lo tanto, la afirmación es verdadera $\blacksquare$

2. Evaluar los siguientes límites de sucesiones:

   a) (*Certamen No 1. Segunda Parte. 2000*) $\lim\limits_{n\to\infty} n(n-\sqrt{n^2-9})$

   Solución propuesta:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} n(n-\sqrt{n^2-9}) &= \lim_{n\to\infty} n(n-\sqrt{n^2-9})\frac{n+\sqrt{n^2-9}}{n+\sqrt{n^2-9}}\\
&= \lim_{n\to\infty} n\frac{n^2-(n^2-9)}{n+\sqrt{n^2-9}} = \lim_{n\to\infty}\frac{9n}{n+\sqrt{n^2-9}}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{9n}{n+\sqrt{n^2\left(1-\dfrac{9}{n^2}\right)}} = \lim_{n\to\infty}\frac{9n}{n+n\sqrt{1-\dfrac{9}{n^2}}}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{9}{1+\sqrt{1-\dfrac{9}{n^2}}}\\
&= \frac{9}{2} \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

   b) (*Certamen N^{o}1. Segunda Parte. 2000*) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2 3^{n+2}+3^n}{5n^2-3n+1}$

   Solución propuesta:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{n^2 3^{n+2}+3^n}{5n^2-3n+1} &= \lim_{n\to\infty}\frac{n^2 3^n 3^2+3^n}{5n^2-3n+1} = \lim_{n\to\infty} 3^n\frac{9n^2+1}{5n^2-3n+1}\\
&= \lim_{n\to\infty}\underbrace{3^n}_{+\infty}\frac{9+\dfrac{1}{n^2}}{\underbrace{5-\dfrac{3}{n}+\dfrac{1}{n^2}}_{>0}}\\
&= +\infty \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

c) (*Certamen Nº1. 2001*) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{18n}(\sqrt{2n+4}-\sqrt{2n})$

Solución propuesta:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sqrt{18n}(\sqrt{2n+4}-\sqrt{2n}) &= \lim_{n\to\infty} 3\sqrt{2}\sqrt{n}(\sqrt{2}\sqrt{n+2}-\sqrt{2}\sqrt{n}) \\
&= \lim_{n\to\infty} 6\sqrt{n}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}) \\
&= \lim_{n\to\infty} 6\sqrt{n}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})\frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} 6\sqrt{n}\frac{n+2-n}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{12\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{12\sqrt{n}}{\sqrt{n\left(1+\frac{2}{n}\right)}+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{12\sqrt{n}}{\sqrt{n}\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{12}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1} \\
&= 6 \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

3. Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 8} \dfrac{\sqrt{2x}-4}{x-8}$

Solución propuesta:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 8} \frac{\sqrt{2x}-4}{x-8} &= \lim_{x\to 8} \frac{\sqrt{2x}-4}{x-8}\frac{\sqrt{2x}+4}{\sqrt{2x}+4} \\
&= \lim_{x\to 8} \frac{2x-16}{(x-8)(\sqrt{2x}+4)} = \lim_{x\to 8} \frac{2(x-8)}{(x-8)(\sqrt{2x}+4)} \\
&= \lim_{x\to 8} \frac{2}{\sqrt{2x}+4} \\
&= \frac{1}{4} \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Opción.- Sea $u=\sqrt{2x} \Leftrightarrow x=\dfrac{u^2}{2}$. Si $x\to 8 \ \Rightarrow \ u\to 4$. Luego:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 8} \frac{\sqrt{2x}-4}{x-8} &= \lim_{u\to 4} \frac{u-4}{\frac{u^2}{2}-8} = \lim_{u\to 4} \frac{2(u-4)}{u^2-16} \\
&= \lim_{u\to 4} \frac{2(u-4)}{(u+4)(u-4)} = \lim_{u\to 4} \frac{2}{u+4} \\
&= \frac{1}{4} \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+9}-3}$

Solución propuesta:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+9}-3} &= \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+9}-3}\cdot\frac{\sqrt{x+4}+2}{\sqrt{x+4}+2}\cdot\frac{\sqrt{x+9}+3}{\sqrt{x+9}+3}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{(x+4-4)(\sqrt{x+9}+3)}{(x+9-9)(\sqrt{x+4}+2)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{x(\sqrt{x+9}+3)}{x(\sqrt{x+4}+2)} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+9}+3}{\sqrt{x+4}+2}\\
&= \frac{3}{2} \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

c) $\lim\limits_{x\to 2} f(x), \quad f(x) = \dfrac{x^2+|x-2|-4}{x^2-4}$

Solución propuesta:

Se tiene que:

$$|x-2| = \begin{cases} -(x-2) & \text{si} \quad x<2\\ 0 & \text{si} \quad x=2\\ x-2 & \text{si} \quad x>2\end{cases}$$

Luego, f se puede escribir como:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-x-2}{x^2-4} & \text{si} \quad x<2\\[2ex] \dfrac{x^2+x-6}{x^2-4} & \text{si} \quad x>2\end{cases}$$

Analizando los límites laterales:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}\frac{x^2-x-2}{x^2-4} = \lim_{x\to 2^-}\frac{(x-2)(x+1)}{(x+2)(x-2)} = \lim_{x\to 2^-}\frac{x+1}{x+2} = \frac{3}{4}$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+}\frac{x^2+x-6}{x^2-4} = \lim_{x\to 2^-}\frac{(x+3)(x-2)}{(x+2)(x-2)} = \lim_{x\to 2^-}\frac{x+3}{x+2} = \frac{5}{4}$$

Finalmente, no existe $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$, ya que $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ $\blacksquare$

d) (*Certamen Nº1. 2001*) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}, \quad f(x)=1-\sqrt{4x^2-7}$

Solución propuesta:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} &= \lim_{x\to 2}\frac{1-\sqrt{4x^2-7}-(-2)}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{3-\sqrt{4x^2-7}}{x-2}\\
&= \lim_{x\to 2}\frac{3-\sqrt{4x^2-7}}{x-2}\cdot\frac{3+\sqrt{4x^2-7}}{3+\sqrt{4x^2-7}}\\
&= \lim_{x\to 2}\frac{9-(4x^2-7)}{(x-2)(3+\sqrt{4x^2-7})} = \lim_{x\to 2}\frac{-4x^2+16}{(x-2)(3+\sqrt{4x^2-7})}\\
&= \lim_{x\to 2}\frac{-4(x^2-4)}{(x-2)(3+\sqrt{4x^2-7})} = \lim_{x\to 2}\frac{-4(x+2)(x-2)}{(x-2)(3+\sqrt{4x^2-7})}\\
&= \lim_{x\to 2}\frac{-4(x+2)}{3+\sqrt{4x^2-7}}\\
&= -\frac{8}{3} \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

e) (*Certamen Nº2. 2003*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}$

Solución propuesta:

Sea $u=\sqrt[3]{1+x} \Leftrightarrow x=u^3-1$. Si $x\to 0 \;\Rightarrow\; u\to 1$. Luego

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x} &= \lim_{u\to 1}\frac{u-1}{u^3-1} = \lim_{u\to 1}\frac{u-1}{(u-1)(u^2+u+1)} = \lim_{u\to 1}\frac{1}{u^2+u+1}\\
&= \frac{1}{3} \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

4. ¿Existe algún número $a\in\mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{x\to -2}\frac{3x^2+ax+a+3}{x^2+x-2}$$

esté determinado? En caso afirmativo, encontrar los valores de a y el límite correspondiente.

Solución propuesta:

El denominador se anula en $x=-2$. En esta situación, es necesario, para que el límite exista, que el numerador se anule simultáneamente para dicho valor. Con ello, resultará una forma idneterminada del tipo $0/0$ que haría posible la existencia del límite. Los valores de a para los que el numerador se anula cuando $x=-2$ son las soluciones de la ecuación

$$12-2a+a+3=0,$$

es decir, $a=15$.

Para este valor de a, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to -2} \frac{3x^2+ax+a+3}{x^2+x-2} &= \lim_{x\to -2} \frac{3x^2+15x+18}{x^2+x-2} = \lim_{x\to -2} \frac{3(x^2+5x+6)}{x^2+x-2} \\
&= \lim_{x\to -2} \frac{3(x+3)(x+2)}{(x+2)(x-1)} = \lim_{x\to -2} \frac{3(x+3)}{x-1} \\
&= -1 \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

5. (*Certamen Nº2. 1999*) Sea $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1} & \text{si} \quad x \neq 1 \\ \\ 1 & \text{si} \quad x = 1 \end{cases}$

   a) Calcular $\lim_{x\to 1} f(x)$.

   Solución propuesta:

   Sea $u = x^{1/6}$. Si $x \to 1 \ \Rightarrow \ u \to 1$. Luego

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} f(x) &= \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1} = \lim_{u\to 1} \frac{u^3-1}{u^2-1} \\
&= \lim_{u\to 1} \frac{(u-1)(u^2+u+1)}{(u+1)(u-1)} = \lim_{u\to 1} \frac{u^2+u+1}{u+1} \\
&= \frac{3}{2} \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

   b) ¿Es f continua para $x = 1$?

   Solución propuesta:

   La función f <u>no</u> es continua para $x=1$, ya que $\lim_{x\to 1} f(x) = \frac{3}{2} \neq f(1) = 1$ $\blacksquare$

6. (*Certamen Nº1. 2001*) Determinar si la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{|4x+8|}{x+2} & \text{si} \quad x < -2 \\ \\ \dfrac{-10x}{x^2+1} & \text{si} \quad x \geq -2 \end{cases}$$

es continua en el punto $a = -2$.

Solución propuesta:

Se tiene que

$$|4x+8| = |4(x+2)| = 4|x+2| = \begin{cases} -4(x+2) & \text{si} \quad x < -2 \\ 0 & \text{si} \quad x = -2 \\ 4(x+2) & \text{si} \quad x > -2 \end{cases}$$

Luego, f se puede escribir como:

$$f(x) = \begin{cases} -4 & \text{si} \quad x < -2 \\ \dfrac{-10x}{x^2+1} & \text{si} \quad x \geq -2 \end{cases}$$

Analizando los límites laterales:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to -2^-} f(x) &= \lim_{x \to -2^-} (-4) = -4 \\ \lim_{x \to -2^+} f(x) &= \lim_{x \to -2^+} \frac{-10x}{x^2+1} = 4 \end{aligned}$$

Finalmente, no existe $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$, ya que $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to -2^+} f(x)$, y por lo tanto f no es continua en el punto $a = -2$ ■

7. Sea $f(x) : \mathbb{R} - \{2\} \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2-3}-1}{x-2} & \text{si} \quad x > 2 \\ \dfrac{x^3-8}{6x-12} & \text{si} \quad x < 2 \end{cases}$$

Definir, si es posible, a f en $x = 2$ de modo que ésta sea continua en dicho punto.

Solución propuesta:

Analizando los límites laterales:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 2^-} f(x) &= \lim_{x \to 2^-} \frac{x^3-8}{6x-12} = \lim_{x \to 2^-} \frac{x^3-2^3}{6(x-2)} \\ &= \lim_{x \to 2^-} \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{6(x-2)} = \lim_{x \to 2^-} \frac{x^2+2x+4}{6} \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 2^+} f(x) &= \lim_{x \to 2^+} \frac{\sqrt{x^2-3}-1}{x-2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{\sqrt{x^2-3}-1}{x-2} \cdot \frac{\sqrt{x^2-3}+1}{\sqrt{x^2-3}+1} \\ &= \lim_{x \to 2^+} \frac{x^2-3-1}{(x-2)(\sqrt{x^2-3}+1)} = \lim_{x \to 2^+} \frac{x^2-4}{(x-2)(\sqrt{x^2-3}+1)} \\ &= \lim_{x \to 2^+} \frac{(x+2)(x-2)}{(x-2)(\sqrt{x^2-3}+1)} = \lim_{x \to 2^+} \frac{x+2}{\sqrt{x^2-3}+1} \\ &= 2 \end{aligned}$$

Luego, $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 2$, ya que $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 2$, de modo que para que f sea continua en $x = 2$, se debe definir $f(2) = 2$ ■

8. (*Certamen Nº1. 1998*) Estudiar la continuidad de f en cada punto de su dominio, donde

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{|x|} & \text{si} \quad -1<x<0\\[2ex] 3x^2+1 & \text{si} \quad x\geq 0\end{cases}$$

Solución propuesta:

Se tiene que

$$|x|=\begin{cases}-x & \text{si} \quad x<0\\ 0 & \text{si} \quad x=0\\ x & \text{si} \quad x>0\end{cases}$$

Luego, f se puede escribir como:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x} & \text{si} \quad -1<x<0\\[2ex] 3x^2+1 & \text{si} \quad x\geq 0\end{cases}$$

Luego, se tiene que f es continua sobre el intervalo $]-1,0[$, por ser un cuociente de funciones continuas con denominador distinto de cero. Sobre el intervalo $]0,+\infty[$ también es continua, por se polinomio. Luego, para estudiar la continuidad de f en $x=0$, se analizan los límites laterales:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x}\cdot\frac{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}\\ &= \lim_{x\to 0^-}\frac{1-x-(1+x)}{x(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-2x}{x(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})}\\ &= \lim_{x\to 0^-}\frac{-2}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1-x}}\\ &= -1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+}(3x^2+1)\\ &= 1\end{aligned}$$

Luego, <u>no</u> existe $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, ya que $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ y por lo tanto f <u>no</u> es continua en $x=0$. Finalmente, f es continua sobre $]-1,0[\,\cup\,]0,+\infty[$ ■