PRIMERA PRUEBA DE CÁLCULO 10001
Ingeniería Civil
FILA A

Sábado 15 de mayo de 2004.

---

1. Calcule:

   (a) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{5}{n\left(\sqrt{n^4+3n}-\sqrt{n^4+3}\right)}$.

   (b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{5n}{\left(\sqrt{n^4+3n}-\sqrt{n^4+3}\right)}$.

   (c) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+8}{n+5}\right)^n$.

   (d) Los $c \in \mathbb{R}$ para los cuales el siguiente límite es un número real.

   $$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{c+2}{5}+\ldots+\left(\frac{c+2}{5}\right)^n\right),$$

   determine el valor del límite.

   (e) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{3n^2-1}{4n^3+1}+\frac{3n^2-2}{4n^3+2}+\ldots+\frac{3n^2-n}{4n^3+n}\right)$.

2. Dada la función
   $$f(x)=\frac{|x|-23}{x+23}$$

   (a) Determine el dominio y los ceros de f.

   (b) Escriba f sin usar el símbolo de valor absoluto y estudie su signo.

   (c) Determine $g(x)=\operatorname{sgn}(f(x))$ (función signo de $f(x)$) y grafique $g(x)$.

   (d) Demuestre que $f(x)<1$ para todo $x \in \operatorname{Dom} f$.

   (e) Pruebe que $f(x)\geq -1$ para todo $x\geq 0$.

   (f) Determine $h(x)=[f(x)]$, (parte entera de $f(x)$) y grafique $h(x)$.

3. Suponga que un cierto cultivo de bacterias tiene inicialmente $a_0=10^{10}$ individuos y que después de una hora muere el 1% , en la hora siguiente muere el 1% de las restantes y así sucesivamente. Sea $a_n =$ el número total de bacterias muertas después de n horas.

   (a) Determine a_n.

   (b) Analice la existencia de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n$ y calcule su valor.

Puntaje: Las preguntas uno y dos valen 2,5 puntos cada una y la pregunta tres vale 1 punto. Explicitar todos los cálculos y justificar las afirmaciones. No debe usar calculadora.
Tiempo: 120 minutos.

SOLUCIÓN

1. (a) (**0.3 puntos**)

$$\begin{aligned}
\frac{5}{n\left(\sqrt{n^4+3n}-\sqrt{n^4+3}\right)} &= \frac{5}{n\left(\sqrt{n^4+3n}-\sqrt{n^4+3}\right)}\cdot\frac{\sqrt{n^4+3n}+\sqrt{n^4+3}}{\sqrt{n^4+3n}+\sqrt{n^4+3}}\\
&= \frac{5\left(\sqrt{n^4+3n}+\sqrt{n^4+3}\right)}{n(3n-3)}\\
&= \frac{5n^2}{n^2(3-\frac{3}{n})}\cdot\left(\sqrt{1+\frac{3}{n^3}}+\sqrt{1+\frac{3}{n^4}}\right).
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{5}{n\left(\sqrt{n^4+3n}-\sqrt{n^4+3}\right)}=\frac{10}{3}.$$

(b) (**0.3 puntos**)
Usando el mismo recurso algebraico que en el ítem anterior, nos queda

$$\frac{5n}{\left(\sqrt{n^4+3n}-\sqrt{n^4+3}\right)}=\frac{5n^3}{n(3-\frac{3}{n})}\cdot\left(\sqrt{1+\frac{3}{n^3}}+\sqrt{1+\frac{3}{n^4}}\right).$$

Así,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{5n}{\left(\sqrt{n^4+3n}-\sqrt{n^4+3}\right)}=\frac{10}{3}\cdot+\infty=+\infty.$$

(c) (**0.3 puntos**)

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+8}{n+5}\right)^n &= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n(1+8/n)}{n(1+5/n)}\right)^n.\\
&= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1+8/n}{1+5/n}\right)^n.\\
&= \lim_{n\to+\infty}\frac{(1+8/n)^n}{(1+5/n)^n}.\\
&= \frac{e^8}{e^5}=e^3
\end{aligned}$$

(d) (**0.6 puntos**)
$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{c+2}{5}+\ldots+\left(\frac{c+2}{5}\right)^n\right)$. Es una serie geométrica de razón $r=\frac{c+2}{5}$, por lo tanto el límite es un número real sólo si:

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{c+2}{5}\right|<1\\
&-5<c+2<5\\
&-7<c<3.
\end{aligned}$$

Luego, para $-7<c<3$ el valor de dicho número es:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{1-\dfrac{c+2}{5}} \\ &= \frac{5}{5-(c+2)} \\ &= \frac{5}{3-c}. \end{aligned}$$

(e) (**1 punto**)
$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{3n^2-1}{4n^3+1}+\dfrac{3n^2-2}{4n^3+2}+\ldots+\dfrac{3n^2-n}{4n^3+n}\right)$.
Este límite se resuelve usando acotamiento. Sea

$$a_n = \frac{3n^2-1}{4n^3+1}+\frac{3n^2-2}{4n^3+2}+\ldots+\frac{3n^2-n}{4n^3+n}$$

Note que, para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$4n^3+1 < 4n^3+2 < \ldots < 4n^3+n$$

Por ende, como son números positivos,

$$\frac{1}{4n^3+1} > \frac{1}{4n^3+2} \ldots > \frac{1}{4n^3+n}$$

Por tanto, si todos los elementos de la suma están divididos por $4n^3+n$ en lugar de los denominadores respectivos, obtenemos una suma menor o igual que a_n; análogamente, si todos los elementos de la suma están divididos por $4n^3+1$ en lugar de los denominadores respectivos, obtenemos una suma mayor o igual que a_n.
Así:

$$\frac{3n^2-1}{4n^3+n}+\ldots+\frac{3n^2-n}{4n^3+n} \leq a_n \leq \frac{3n^2-1}{4n^3+1}+\ldots+\frac{3n^2-n}{4n^3+1}$$

$$\frac{3n^2-1+\ldots+3n^2-n}{4n^3+n} \leq a_n \leq \frac{3n^2-1+\ldots+3n^2-n}{4n^3+1}$$

$$\frac{n\left(3n^2\right)-(1+\ldots+n)}{4n^3+n} \leq a_n \leq \frac{n\left(3n^2\right)-(1+\ldots+n)}{4n^3+1}$$

$$\frac{3n^3-\dfrac{n(n+1)}{2}}{4n^3+n} \leq a_n \leq \frac{3n^3-\dfrac{n(n+1)}{2}}{4n^3+1}.$$

Observamos que a_n esta acotada por el cuociente de dos polinomios del mismo grado, por lo tanto convergen al cuociente de los coeficientes que acompañan a la máxima potencia. En este caso $\dfrac{3}{4}$. Por lo tanto:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3n^2-1}{4n^3+1}+\frac{3n^2-2}{4n^3+2}+\ldots+\frac{3n^2-n}{4n^3+n}\right) = \frac{3}{4}.$$

2.

$$f(x) = \frac{|x| - 23}{x + 23}$$

(a) (**0.3 puntos**)

- $x \in \mathrm{Dom}(f) \Leftrightarrow x+23 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -23$. Por lo tanto, $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-23\}$.
- x es un cero de $f \Leftrightarrow f(x) = 0$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{|x| - 23}{x + 23} = 0 \Leftrightarrow |x| - 23 = 0 \Leftrightarrow |x| = 23 \Leftrightarrow x = \pm 23.$$

Pero $-23 \notin \mathrm{Dom}\,(f)$, por lo tanto f tiene un único cero en $x = 23$.

(b) (**0.2 puntos**)

Escriba f sin usar el símbolo de valor absoluto y estudie su signo.

- Notemos que: $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x > 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$

  Así tenemos:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x - 23}{x + 23} & \text{si } x > 0 \\[2ex] \dfrac{-x - 23}{x + 23} = -1 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

- **Signo de f:**

  Si $x \leq 0$, $f(x) = -1$ y por tanto es negativa en $\mathbb{R}^-$.

  Si $0 < x < 23$, entonces $x - 23 < 0$ y $x + 23 > 0$. Por lo cual, $f(x) < 0$.

  Si $x > 23$, entonces $x - 23 > 0$ y $x + 23 > 0$. Por lo cual, $f(x) > 0$.

  Así, tenemos que $f(x)$ es $\begin{cases} \text{negativa} & \text{si } x < 23,\ x \neq -23 \\ \text{positiva} & \text{si } x > 23. \end{cases}$

(c) (**0.5 puntos**)

$$g(x) = \mathrm{sgn}\,(f(x)) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 23,\ x \neq -23 \\ 0 & \text{si } x = 23 \\ 1 & \text{si } x > 23. \end{cases}$$

Gráfico

1

-23 23

-1

(d) (**0.5 puntos**)

Si $x \leq 0$, $f(x) = -1 < 1$.

Si $x > 0$, $f(x) = \dfrac{x - 23}{x + 23} < 1$. Porque el numerador es menor que el denominador. Por tanto, se cumple que $f(x) < 1$ para todo $x \in \mathrm{Dom}\, f$.

(e) (**0.5 puntos**) Si $x \geq 0$:

$-x < x \Rightarrow -x - 23 < x - 23 \Rightarrow -1 = \dfrac{-x-23}{x+23} < \dfrac{x-23}{x+23} = f(x)$.

De lo que se deduce que $f(x) \geq -1$ para todo $x \geq 0$.

(f) (**0.5 puntos**)

Si $x \leq 0$, $f(x) = -1 < 1 \Longrightarrow [f(x)] = -1$.

Si $0 < x < 23$, $-1 < f(x) < 0 \Longrightarrow [f(x)] = -1$.

Si $x > 23$ f es positiva pero menor que 1, por tanto, $[f(x)] = 0$. En síntesis,

$$g(x) = [f(x)] = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 23, x \neq -23 \\ 0 & \text{si } x \geq 23. \end{cases}$$

Gráfico

1

-23 23

-1

3. (a) (**0.6 puntos**)

Sea $a_0 = 10^{10}$.

$m_1 =$ cantidad de bacterias muertas durante la primera hora

$$m_1 = \frac{a_0}{100}.$$

$q_1 =$ cantidad de bacterias restantes despues de la primera hora

$= a_0 \left(1 - \dfrac{1}{100}\right) = a_0 \dfrac{99}{100}$.

$m_2 =$ cantidad de bacterias muertas durante la segunda hora

$$m_2 = \frac{1}{100} q_1 = \frac{1}{100} a_0 \frac{99}{100}.$$

$q_2 = q_1 - m_2 =$ cantidad de bacterias restantes despues de la segunda hora

$= \dfrac{a_0}{100} \cdot 99 - \dfrac{1}{100} \dfrac{a_0}{100} \cdot 99 = a_0 \left(\dfrac{99}{100}\right)^2$.

$m_n =$ cantidad de bacterias muertas durante la hora n

$$m_n = \frac{1}{100} a_0 \left(\frac{99}{100}\right)^{n-1}.$$

$a_n =$ el número total de bacterias muertas después de n horas

$$\begin{aligned} a_n &= m_1 + m_2 + m_3 + \cdots + m_n \\ &= \frac{a_0}{100} + \frac{a_0}{100}\frac{99}{100} + \frac{a_0}{100}\left(\frac{99}{100}\right)^2 + \cdots + \frac{a_0}{100}\left(\frac{99}{100}\right)^{n-1} \\ &= \frac{a_0}{100}\left(1 + \frac{99}{100} + \left(\frac{99}{100}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{99}{100}\right)^{n-1}\right) \end{aligned}$$

(b) (**0.4 puntos**)

a_n es el termino general de una serie geométrica de razón positiva $\frac{99}{100}$ menor que 1, por lo tanto $\lim_{n\to+\infty} a_n$ existe.

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} a_n &= \lim_{n\to+\infty} \frac{a_0}{100}\left(1+\frac{99}{100}+\left(\frac{99}{100}\right)^2+\ldots+\left(\frac{99}{100}\right)^{n-1}\right)\\
&= \frac{a_0}{100}\left(\frac{1}{1-\frac{99}{100}}\right) = a_0.
\end{aligned}
$$