PRIMERA PRUEBA DE CÁLCULO 10001
Ingeniería Civil , Ingeniería Estadística, L.C.C.
FILA A

23 de abril de 2005

---

1. (a) Calcule $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5^n + 3^{n+2}}{5^{n-1} + 3^{n+1}}$

   (b) Resuelva la inecuación $\dfrac{(x+1)\sqrt{x^2 - 19x + 18}}{x^5 - 81x} \geq 0.$

   (c) Determine supremo e ínfimo del conjunto

$$\mathcal{A} = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{|x-4| - x}{2|x| + 1} > 2 \right\}.$$

(1,8 puntos)

2. Si

$$x_n = \frac{n^3 - 4}{2n^2 + 1} + \frac{1 - cn^2}{4n + 5},$$

   determine los valores que puede tomar la constante c de modo que :

   (a) $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty.$

   (b) $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = -\infty.$

   (c) $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n \in \mathbb{R}.$

(1,2 puntos)

3. Dadas las sucesiones de término general

$$a_n = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right) \quad y \quad b_n = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}\right);$$

   (a) Calcule $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

   (b) Demuestre que la sucesión $\{b_n\}$ es creciente.

   (c) Demuestre que $b_n \leq a_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

   (d) Demuestre que $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n$ existe y es un número entre $\dfrac{1}{3}$ y $\dfrac{2}{3}$.

   (e) Encuentre cotas superiores e inferiores del conjunto $\left\{ \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{3k!} \; ; \; n \in \mathbb{N} \right\}$.

(3 puntos)

Explicitar todos los cálculos y justificar las afirmaciones.
No debe usar calculadora.
Tiempo: 120 minutos.

SOLUCIÓN

1. Como el cálculo directo da una forma indeterminada de tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$, se debe transformar la expresión del término general.

$$\frac{5^n+3^{n+2}}{5^{n-1}+3^{n+1}} = \frac{5^n+3^2\cdot 3^n}{5^n\cdot 5^{-1}+3\cdot 3^n} = \frac{5^n\left[1+3^2\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^n\right]}{5^n\left[5^{-1}+3\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^n\right]} = \frac{1+3^2\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^n}{5^{-1}+3\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^n}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{5^n+3^{n+2}}{5^{n-1}+3^{n+1}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1+3^2\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^n}{5^{-1}+3\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^n} = 5.$$

(b) Factorizando la expresion se obtiene :

$$\frac{(x+1)\sqrt{x^2-19x+18}}{x^5-81x} = \frac{(x+1)\sqrt{(x-1)(x-18)}}{x(x^4-81)} = \frac{(x+1)\sqrt{(x-1)(x-18)}}{x(x^2-9)(x^2+9)}.$$

Por lo tanto,

$$\frac{(x+1)\sqrt{x^2-19x+18}}{x^5-81x} \geq 0 \Longleftrightarrow \frac{(x+1)\sqrt{(x-1)(x-18)}}{x(x+3)(x-3)(x^2+9)} \geq 0.$$

La raíz cuadrada existe sólo cuando $(x-1)(x-18)\geq 0$, bajo esta condición se resuelve la desigualdad. Considerando que una raíz cuadrada es no negativa y que x^2+9 es positivo para todo $x\in\mathbb{R}$, tenemos que

$$\frac{(x+1)\sqrt{x^2-19x+18}}{x^5-81x} \geq 0 \Longleftrightarrow \frac{x+1}{x(x+3)(x-3)} \geq 0.$$

Esta desigualdad se cumple para todo $x \in]-\infty,-3[\cup[-1,0[\cup]3,+\infty[$.
Pero, se debe tener también que $(x-1)(x-18)\geq 0$.

$$(x-1)(x-18)\geq 0 \Longleftrightarrow x\in]-\infty,1]\cup[18,+\infty[.$$

Intersectando ambos conjuntos, se obtiene la solución de la inecuación dada:

$$]-\infty,-3[\cup[-1,0[\cup]18,+\infty[\cup\{1\}.$$

(c) Para determinar el infimo y el supremo del conjunto, debemos en primer lugar resolver la inecuación que lo define.

Como $2|x|+1>0$, la inecuación $\dfrac{|x-4|-x}{2|x|+1}>2$. puede ser reescrita de la forma

$$|x-4|-x>2(2|x|+1) \Longleftrightarrow |x-4|-x-4|x|-2>0$$

Para sacar el valor absoluto debemos considerar los cambios de signo de $x-4$ y x.

- Si $x<0 \Longrightarrow x-4<0,\ x<0 \Longrightarrow |x-4|=-(x-4),\ |x|=-x.$

$$\begin{aligned} |x-4|-x-4|x|-2>0 &\Longleftrightarrow -(x-4)-x-4(-x)-2>0\\ &\Longleftrightarrow -x+4-x+4x-2>0\\ &\Longleftrightarrow 2x+2>0 \Longleftrightarrow 2x>-2 \Longleftrightarrow x>-1.\end{aligned}$$

  Como estamos bajo la hipótesis $x\in]-\infty,0[$, los números que satisfacen la desigualdad son los pertenecientes al conjunto $x\in]-1,0[$.

- Si $0 \leq x \leq 4 \Longrightarrow x-4<0,\ x>0 \Longrightarrow |x-4| = -(x-4),\ |x| = x$.

  $$\begin{aligned} |x-4| - x - 4|x| - 2 > 0 &\iff -(x-4) - x - 4x - 2 > 0 \\ &\iff -x + 4 - x - 4x - 2 > 0 \\ &\iff -6x + 2 > 0 \iff 1 > 3x \iff x < \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

  Los números que satisfacen la desigualdad y que pertenecen al intervalo $[0,4]$son los pertenecientes al conjunto $\left[0, \frac{1}{3}\right[$.

- Si $x > 4 \Longrightarrow x-4>0,\ x>0 \Longrightarrow |x-4| = (x-4),\ |x| = x$.

  $$\begin{aligned} |x-4| - x - 4|x| - 2 > 0 &\iff (x-4) - x - 4x - 2 > 0 \\ &\iff x - 4 - x - 4x - 2 > 0 \\ &\iff -4x > 6 \iff 4x < -6 \iff x < -\frac{3}{2}. \end{aligned}$$

  Este resultado es incompatible con la hipótesis $x \in]4, +\infty[$, por tanto, en este intervalo no hay soluciones para la desigualdad dada.

Uniendo los resultados parciales, la solución es $\left]-1, \frac{1}{3}\right[$.
Así, vemos que el conjunto dado es un intervalo, por lo tanto,
$\sup \mathcal{A} = \frac{1}{3}$ e $\inf \mathcal{A} = -1$.

2. En primer lugar trabajamos algebraicamente la expresión

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{n^3-4}{2n^2+1} + \frac{1-cn^2}{4n+5} \\ &= \frac{(n^3-4)(4n+5) + (2n^2+1)(1-cn^2)}{(2n^2+1)(4n+5)} \\ &= \frac{(4-2c)n^4 + 5n^3 + (2-c)n^2 - 16n - 20}{8n^3 + 10n^2 + 4n + 5} \end{aligned}$$

(a) Si $4-2c>0$ es decir, si $c<2$ entonces $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$.

(b) Si $4-2c<0$, es decir, $c>2$, entonces $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = -\infty$.

(c) Si $4-2c=0$, es decir si $c=2$, entonces $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \frac{5}{8}$.

3. Consideremos las sucesiones

$$a_n = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right) \quad y \quad b_n = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}\right);$$

(a) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right)$. Que corresponde a una serie geométrica de razón $r = \frac{1}{2}$ y por lo tanto converge a

$$L = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$$

Así $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \frac{2}{3}$.

(b)

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right) \\ b_{n+1} &= \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}\right) \end{aligned}$$

Así
$b_{n+1}-b_n=\frac{1}{3}\frac{1}{(n+1)!}>0 \Longrightarrow b_{n+1}>b_n$.

(c) Basta notar que $\frac{1}{k!}=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots k}<\frac{1}{2^{k-1}}$. y comparar con la serie geométrica.

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right) &< \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}\right) \\ &< \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^{n}}\right). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $a_n \leq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(d)
- De lo visto anteriormente, sabemos que la sucesión $\{b_n\}$es creciente . Además, $\{b_n\}$ es acotada superiormente, por estar acotada superiormente por a_n que es convergente y por tanto, acotada. Aplicando el **Teorema de las Sucesiones Monótonas**, tenemos que $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n$ existe.
- Como el límite preserva el orden

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \leq \quad & \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right) && \leq \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}\right) \Longrightarrow \\ \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{3} \leq \quad & \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right) && \leq \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}\right) \\ & \Longrightarrow && \frac{1}{3} \leq L \leq \frac{2}{3} \end{aligned}$$

(e) Observemos que

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{3k!}=\frac{1}{3}\left(1+1+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right)=\frac{1}{3}+b_n.$$

De lo demostrado anteriormente, sabemos que

$$\frac{1}{3} \leq b_n \leq \frac{2}{3}.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}+\frac{1}{3} \leq \quad & 1+b_n && \leq \frac{1}{3}+\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \leq \quad & \tfrac{1}{3}+b_n && \leq \frac{3}{3}=1. \end{aligned}$$

De lo anterior se deduce que el conjunto $\left\{\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{3k!}\ ;\ n\in\mathbb{N}\right\}$, es acotado superiormente por cualquier número mayor que 1 y es acotado inferiormente por cualquier número menor que $\frac{2}{3}$.