PRUEBA ACUMULATIVA SEMESTRAL DE CÁLCULO 10001
Ingeniería Civil, Ingeniería Matemática, Ingeniería Estadística, L.C.C.
Fila A

21 de agosto de 2004.

---

1. Dada la función $h(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2$ determine:
   (a) El dominio, ceros y signo de h.
   (b) El crecimiento de h y existencia de máximos y mínimos.
   (c) La curvatura y puntos de inflexión. Grafique la curva.

2. Dadas las funciones $f(x) = \sqrt[7]{3\tan^2 x} - 1$, $g(x) = 2\text{sen}^2 x + 5\text{sen}\, x - 3$ y $u(x) = \arctan(x^3 + \text{arcsen}\, x)$, calcule:
   (a) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)$.
   (b) $\lim\limits_{x\to\pi/6}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)$.
   (c) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(u(x)\cdot \text{cotan}\, x\right)$.

3. Dada la curva cuyas ecuaciones paramétricas son:
$$x(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad , \quad y(t) = \frac{t-t^3}{1+t^2} \; ; \quad t \in \mathbb{R}.$$
   Calcule:
   (a) $x'(t)$ y $y'(t)$.
   (b) La recta tangente a la curva en el punto $(x(1), y(1))$.
   (c) $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t)$ y $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t)$. ¿ Qué puede decir de la curva cuando t crece indefinidamente?

4. Dada la curva en coordenadas polares
$$r(\theta) = 1 - \text{sen}\, 2\theta.$$
   (a) Determine el acotamiento y la región del plano donde se encuentra la curva.
   (b) Calcule el o los ángulos θ donde r alcanza su longitud máxima.
   (c) Encuentre los puntos (θ, r) de intersección de la curva con los ejes X e Y
   (d) Esboce el gráfico de la curva para los valores de $\theta \in [0, \pi]$.

Explicite todos los cálculos y justifique sus afirmaciones. No debe usar calculadora.
Puntaje: Cada pregunta vale 1,5 puntos.
Tiempo: 120 minutos.

SOLUCIÓN:

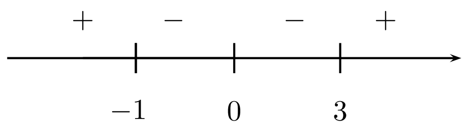
1. **(0.5 puntos)**

   (a) • **(0.1 puntos)**Dom $(h) = \mathbb{R}$ por ser un polinomio.

   • **(0.2 puntos)**Ceros de h.

$$\begin{aligned} h(x) = 0 &\iff x^4 - 2x^3 - 3x^2 = 0 \\ &\iff x^2(x^2 - 2x - 3) = 0 \\ &\iff x = 0,\ x = 3,\ x = -1. \end{aligned}$$

   • **(0.2 puntos)** Signo de h. Por ser un polinomio, h es continuo y tiene signo constante entre ceros consecutivos. Como 0 es una raíz doble, en $x = 0$ no hay cambio de signo.



   Por otra parte, si $h(x) = x^2(x-3)(x+1)$ entonces el signo de $h(x)$ es el signo de $(x-3)(x+1)$.

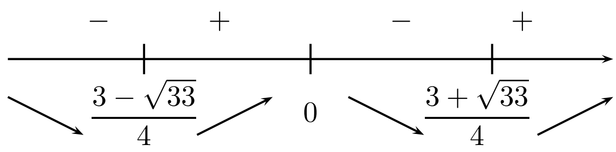
   (b) **(0.5 puntos)Crecimiento de h y existencia de máximos y mínimos.**

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dx} &= 4x^3 - 6x^2 - 6x \\ &= 2x(2x^2 - 3x - 3). \end{aligned}$$

   Luego, $h'(x) = 0 \iff 2x(2x^2 - 3x - 3) = 0$, por tanto obtenemos que:

$$h'(x) = \begin{cases} 2x = 0 \\ 2x^2 - 3x - 3 = 0. \end{cases}$$

   Así, obtenemos que $x = 0$, $x = \dfrac{3+\sqrt{33}}{4}$, $x = \dfrac{3-\sqrt{33}}{4}$.**(0.2 puntos)**
   El signo de h' se representa en el siguiente esquema:

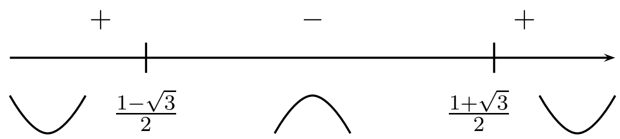


   (0.2 puntos)
   En virtud del criterio de la primera derivada, $h(x)$ alcanza dos mínimos relativos, localizados en $\left(\dfrac{3-\sqrt{33}}{4}, f\left(\dfrac{3-\sqrt{33}}{4}\right)\right)$ y $\left(\dfrac{3+\sqrt{33}}{4}, f\left(\dfrac{3+\sqrt{33}}{4}\right)\right)$, y alcanza un máximo relativo localizado en $(0, f(0))$. **(0.1 puntos)**

(c) **(0.5 puntos)Curvatura, puntos de inflexión y gráfico de la curva.**

$$f''(x) = 12x^2 - 12x - 6.$$

Por tanto, $f''(x) = 0$ si y sólo si $12x^2 - 12x - 6 = 0$, obteniéndose las soluciones $x = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$, $x = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$. **(0.1 puntos)**
El signo de f'' es



(0.2 puntos)

En base a la información obtenida, el gráfico es:

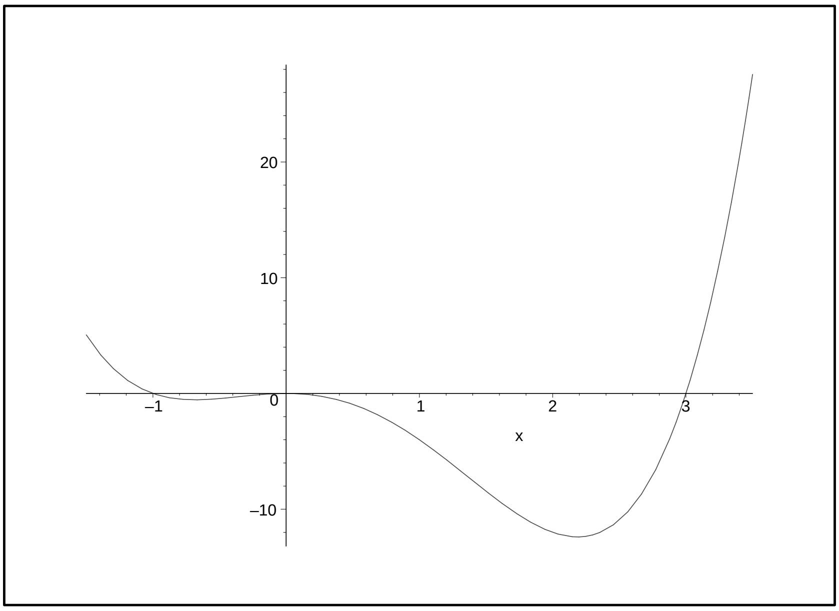


Figure 1: Gráfico de $h(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2$

Gráfico:**(0.2 puntos)**

2. **(0.5 puntos)**

(a) • **(0.1 puntos)**$f(x) = \sqrt[7]{3\tan^2 x} - 1$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}\left\{\sqrt[7]{3\tan^2 x} - 1\right\} \\ &= \frac{1}{7}(3\tan^2 x)^{\frac{1}{7}-1} \cdot 6\tan x \cdot \sec^2 x \\ &= \frac{6\tan x \sec^2 x}{7\sqrt[7]{(3\tan^2 x)^6}}. \end{aligned}$$

- **(0.1 puntos)**$g(x) = 2\text{sen}^2 x + 5\text{sen}\, x - 3$.

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{d}{dx}\left\{2\,\text{sen}^2 x + 5\text{sen}\, x - 3\right\} \\ &= 4\,\text{sen}\, x \cos x + 5\cos x. \end{aligned}$$

(0.3 puntos)

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

$$= \frac{\left(\dfrac{6\tan x \sec^2 x}{7\sqrt[7]{(3\tan^2 x)^6}}\right)(2\text{sen}^2 x + 5\text{sen}\, x - 3) - \left(\sqrt[7]{3\tan^2 x} - 1\right)(4\,\text{sen}\, x\cos x + 5\cos x)}{(2\text{sen}^2 x + 5\text{sen}\, x - 3)^2}$$

(b) **(0.5 puntos)**

Notemos que para $x = \dfrac{\pi}{6}$ tenemos que: $\begin{cases} f\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 0 \\ \\ g\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 0 \end{cases}$

La evaluación directa de $\lim\limits_{x\to\pi/6}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)$, da origen a una forma indeterminada del tipo $\dfrac{0}{0}$. **(0.2 puntos)**

Usando la regla de L'Hôpital, obtenemos que:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\pi/6}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) &= \lim_{x\to\pi/6}\left(\frac{f'(x)}{g'(x)}\right) \\ &= \lim_{x\to\pi/6}\frac{\dfrac{6\tan x\sec^2 x}{7\sqrt[7]{(3\tan^2 x)^6}}}{4\,\text{sen}\, x\cos x + 5\cos x.}\textbf{(0.2 puntos)} \\ &= \frac{6\cdot 4}{7\cdot\sqrt{3}\cdot 3\left(4\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} + 5\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{16}{147}.\textbf{(0.1 puntos)} \end{aligned}$$

(c) $\lim\limits_{x\to 0^+}(u(x)\cdot\text{cotan}\, x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\arctan(x^3 + \text{arcsen}\, x)\cdot\text{cotan}\, x\right)$

Lo que da lugar a una forma indeterminada $0\cdot +\infty$, para la cual no podemos aplicar la regla de L'Hôpital en directo. No obstante, este límite puede ser reescrito como:

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\arctan(x^3 + \text{arcsen}\, x)}{\tan x}\right),$$

el que da lugar a una forma indeterminada del tipo $\dfrac{0}{0}$, que puede ser trabajada con la regla de L'Hôpital.**(0.2 puntos)**

Como $u'(x) = \dfrac{1}{1+\left(x^3+\operatorname{arcsen} x\right)^2} \cdot \left(3x^2 + \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$. **(0.1 puntos)**

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} \frac{u(x)}{\tan x} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{u'(x)}{\tan x} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{\dfrac{1}{1+\left(x^3+\operatorname{arcsen} x\right)^2} \cdot \left(3x^2 + \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)}{\sec^2 x} \\
&= \frac{\dfrac{1}{1+(0+0)^2} \cdot \left(0 + \dfrac{1}{\sqrt{1-0}}\right)}{1} = 1. \textbf{(0.2 puntos)}
\end{aligned}
$$

3. **(0.5 puntos)**

$$
\begin{aligned}
x'(t) &= \frac{-2t(1+t^2)-(1-t^2)2t}{(1+t^2)^2} = \frac{-4t}{(1+t^2)^2} \ \textbf{(0.2 puntos)} \\
y'(t) &= \frac{(1-3t^2)(1+t^2)-(t-t^3)2t}{(1+t^2)^2} = \frac{1-4t^2-t^4}{(1+t^2)^2}. \ \textbf{(0.3 puntos)}
\end{aligned}
$$

(b) **(0.5 puntos)**
La ecuación de la recta tangente a la curva en el punto $(x(1), y(1))$ es

$$y = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=1} (x - x(1)) + y(1). \ \textbf{(0.1 puntos)}$$

$$x(1) = 0 \qquad , y(1) = 0. \ \textbf{(0.1 puntos)}$$

$$\frac{dy}{dx}(1) = \left.\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right|_{t=1} = \left.\frac{1-4t^2-t^4}{-4t}\right|_{t=1} = 1. \ \textbf{(0.2 puntos)}$$

Por lo tanto, la ecuación pedida es,

$$y = x. \ \textbf{(0.1 puntos)}$$

(c) **(0.5 puntos)**

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{1-t^2}{1+t^2} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t^2\left(\dfrac{1}{t^2}-1\right)}{t^2\left(\dfrac{1}{t^2}+1\right)} = -1. \ \textbf{(0.2 puntos)}$$

y

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{t-t^3}{1+t^2} = \frac{t^3\left(\dfrac{1}{t^2}-1\right)}{t^2\left(\dfrac{1}{t^2}+1\right)} = -\infty. \ \textbf{(0.2 puntos)}$$

- La recta $x = -1$ es una asíntota vertical de la curva.

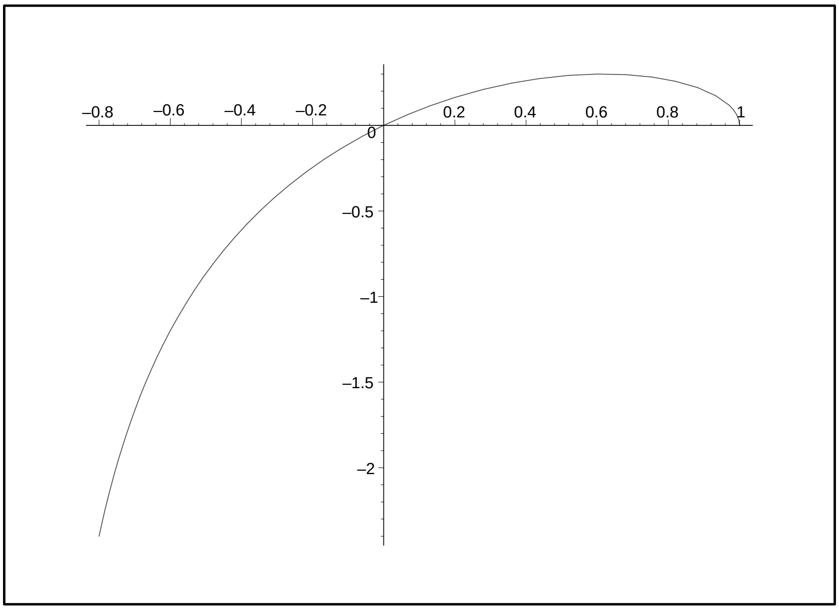


Figure 2: Gráfico de la curva para t positivo.

- Otra respuesta puede ser, que cuando t crece, la curva se acerca por el eje X a -1 y por el eje Y se aleja al $-\infty$
- Otra equivalente.**(0.1 puntos)**.

El gráfico de la curva, que no se pide, para $t \geq 0$ es:

4. (a) **(0.3 puntos)**Acotamiento y región del plano donde se encuentra la curva.

$$|r(\theta)| = |1 - \text{sen}\,(2\theta)| \leq |1| + |\text{sen}\,(2\theta)| \leq 2$$

Por tanto, la curva se encuentra dentro del círculo de centro (0,0) y radio 2.

(b) **(0.4 puntos)** Ángulos θ donde r alcanza su longitud máxima.
Existen dos formas de abordar el problema, usando derivadas o el recorrido de la función $1 - \text{sen}\,2\theta$. Para este análisis consideraremos $\theta \in [0, 2\pi]$.

- $r'(\theta) = -2\cos(2\theta)$

$$\begin{aligned} r'(\theta) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \cos(2\theta) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 2\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2} \\ &\Leftrightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r''(\theta) &= 4\text{sen}\,(2\theta) \\ r''\left(\frac{\pi}{4}\right) &= 4\text{sen}\,\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4 = r''\left(\frac{5\pi}{4}\right) \\ r''\left(\frac{3\pi}{4}\right) &= 4\text{sen}\,\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -4 = r''\left(\frac{7\pi}{4}\right). \end{aligned}$$

Por tanto, usando el criterio de la segunda derivada, en $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ y $\theta = \dfrac{5\pi}{4}$ el radio alcanza su valor mínimo, $r = 0$. En $\theta = \dfrac{3\pi}{4}$ y $\theta = \dfrac{7\pi}{4}$ el radio alcanza su valor máximo, $r = 2$.

- (Usando el recorrido de la función.)Como seno tiene valor mínimo -1 en $3\pi/2$, el radio alcanza su valor máximo si $2\theta = 3\pi/2, 7\pi/2$.

(c)

- **(0.2 puntos)Intersecciones con el eje X:** $\theta = 0$ ó $\theta = \pi$.
  Si $\theta = 0$, entonces $r(0) = 1$.
  Si $\theta = \pi$, entonces $r(\pi) = 1$.
  Por lo tanto, la curva intersecta al eje X en los puntos de coordenadas polares $(0, 1)$ y $(\pi, 1)$.
- **(0.2 puntos) Intersecciones con el eje Y:** $\theta = \pi/2$ ó $\theta = 3\pi/2$.
  Si $\theta = \pi/2$, entonces $r(\pi/2) = 1$.
  Si $\theta = 3\pi/2$, entonces $r(3\pi/2) = 1$.
  Por lo tanto, la curva intersecta al eje Y en los puntos de coordenadas polares $(\pi/2, 1)$ y $(3\pi/2, 1)$.
- **(0.4 puntos) Bosquejo del gráfico para** $\theta \in [0, \pi]$.
  Ya conocemos las intersecciones con los ejes y el ángulo donde el radio alcanza su valor máximo. Para esbozar el gráfico falta analizar los valores del ángulo en qué la curva pasa por el origen y el signo de r.
  Ceros de r**.**
  $$r = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen} 2\theta = 1 \Leftrightarrow \theta = \pi/4.$$
  Signo de r**.**
  Como la función seno varía entre 0 y 1, se deduce que $r(\theta) \geq 0$. Por lo tanto la curva está en el primer y segundo cuadrante.

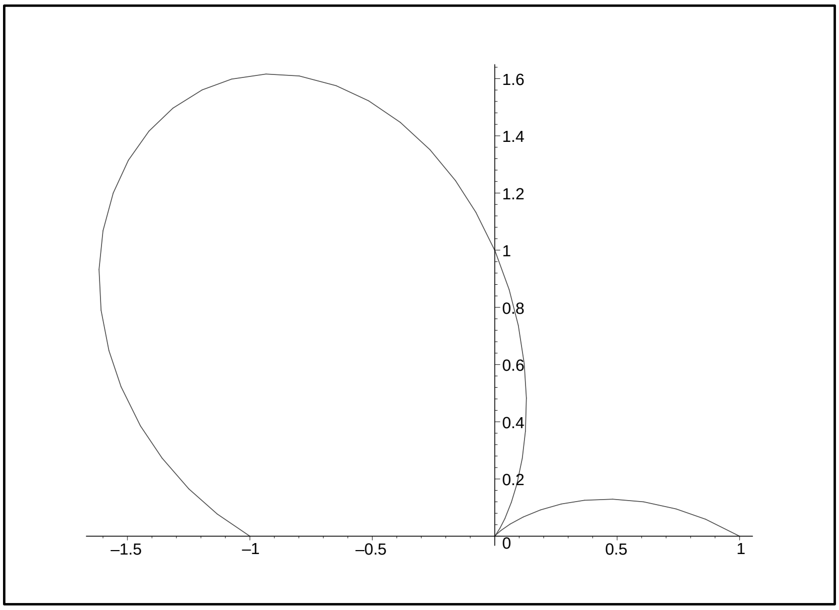


Figure 3: Gráfico de la curva $r = 1 - \operatorname{sen}(2\theta)$ para $\theta \in [0, \pi]$.