SEGUNDA PRUEBA DE CÁLCULO 10001
Ingeniería Civil, Ingeniería Matemática, Ingeniería Estadística, L.C.C.
Fila A

Sábado 26 de junio de 2004.

---

1. Calcule:

   (a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{3x^2+2x+5}-\sqrt{3x^2+4x+6}\right)$.

   (b) $\dfrac{dy}{dx}$ para $y=\dfrac{\operatorname{sen}^m(\alpha x^\delta)}{x^\lambda}$. donde m, α, λ y δ son constantes racionales .

   (c) La ecuación de la recta tangente al gráfico de f en $(\pi/4\,,\ f(\pi/4))$ si $f(x)=\operatorname{sen}(5x)\operatorname{sen}^5 x$.

   (d) $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$, si $f(x)=\sqrt{\operatorname{sen}x+\cos 2x}$.

   (e) El valor de $f'(0)$ si $f(x)=\dfrac{u(x)\cdot(1+\tan x)}{v(x)}$; donde u, v son funciones tales que $u'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $v'(x)=v(x)$, $u(0)=0$ y $v(0)=1$.

2. Sea $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2\operatorname{sen}x}{x^2-\pi x}; & x\neq 0; x\neq\pi\\ a & \text{si } x=0\\ b & \text{si } x=\pi\end{cases}$

   Donde a y b son constantes reales no nulas.

   (a) Determine el dominio, la paridad y los ceros de f.

   (b) Analice la existencia de asíntotas horizontales y verticales. Escriba las correspondientes ecuaciones cuando ellas existan.

   (c) Estudie la continuidad de f si $x\in\mathbb{R}-\{0,\pi\}$.

   (d) Determine a y b de modo que f resulte continua en $x=0$ y en $x=\pi$.

   (e) Calcule $f'(\pi/2)$ e interprete geométricamente el resultado.

Explicite todos los cálculos y justifique sus afirmaciones. No debe usar calculadora.
Puntaje: Cada ítem de la pregunta 1 vale 0,6 puntos, los ítemes 2a y 2b valen 0,8 puntos cada uno, 2c, 2d y 2e valen 0,3, 0,4 y 0,7 puntos respectivamente .
Tiempo: 120 minutos.

SOLUCIÓN

1. (a) **(0.6 puntos)**

$$\begin{aligned}
&\left(\sqrt{3x^2+2x+5}-\sqrt{3x^2+4x+6}\right) = \\
&= \left(\sqrt{3x^2+2x+5}-\sqrt{3x^2+4x+6}\right)\cdot\frac{\sqrt{3x^2+2x+5}+\sqrt{3x^2+4x+6}}{\sqrt{3x^2+2x+5}+\sqrt{3x^2+4x+6}}\\
&= \frac{-2x-1}{|x|\sqrt{3+2/x+5/(x^2)}+|x|\sqrt{3+4/x+6/(x^2)}}\\
&= \frac{-x(2+1/x)}{-x\left(\sqrt{3+2/x+5/(x^2)}+\sqrt{3+4/x+6/(x^2)}\right)}
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{3x^2+2x+5}-\sqrt{3x^2+4x+6}\right)=\frac{2}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

(b) **(0.6 puntos)**

$$y=\frac{\text{sen}^{\,m}(\alpha x^\delta)}{x^\lambda}.$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{m\cdot\text{sen}^{\,m-1}(\alpha x^\delta)\cdot\cos(\alpha x^\delta)\cdot\alpha\delta x^{\delta-1}\cdot x^\lambda-\text{sen}^{\,m}(\alpha x^\delta)\cdot\lambda x^{\lambda-1}}{x^{2\lambda}}.$$

(c) **(0.6 puntos)**

La ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el punto (x_0,y_0) está dada por:

$$L_T:(y-y_0)=f'(x_0)(x-x_0)$$

Donde $y_0=f(x_0)$.
Calculando los elementos, obtenemos:

- $x_0=\dfrac{\pi}{4}$
-
$$\begin{aligned}
f'(x)&=\frac{d}{dx}\left(\text{sen}\,(5x)\,\text{sen}^{\,5}x.\right)\\
f'(x)&=5\cdot\cos(5x)\cdot\text{sen}^{\,5}x+5\cdot\text{sen}\,(5x)\cdot\text{sen}^{\,4}x\cdot\cos x\\
f'(x)&=5\cdot\text{sen}^{\,4}x\,[\cos(5x)\text{sen}\,x+\text{sen}\,(5x)\cos x]\\
f'(x)&=5\cdot\text{sen}^{\,4}x\cdot\text{sen}\,(6x).
\end{aligned}$$
$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=5\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4(-1)=-\frac{5}{4}$$
- $y_0=f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\text{sen}\left(\dfrac{5\pi}{4}\right)\cdot\text{sen}^{\,5}\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{1}{8}.$

Por tanto la ecuación de la recta tangente es:

$$L_T:y=-\frac{5}{4}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{8}.$$

$$20x+16y-5\pi+2=0.$$

(d) **(0.6 puntos)**

$$f(x) = \sqrt{\text{sen}\, x + \cos 2x}.$$

$$f'(x) = \frac{\cos x - 2\text{sen}\, 2x}{2\sqrt{\text{sen}\, x + \cos 2x}}.$$

$$f''(x) = \frac{-1}{2(\text{sen}\, x + \cos 2x)}\left[(\text{sen}\, x + 4\cos 2x)\cdot\sqrt{\text{sen}\, x + \cos 2x} + \frac{(\cos x - 2\text{sen}\, 2x)^2}{2\cdot\sqrt{\text{sen}\, x + \cos 2x}}\right].$$

Luego, $f(0) = 1$, $f'(0) = \dfrac{1}{2}$, $f''(0) = -\dfrac{9}{4}$.

(e) **(0.6 puntos)**

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}\left[\frac{u(x)\cdot(1+\tan x)}{v(x)}\right] \\ &= \frac{\left[u'(x)(1+\tan x) + u(x)\sec^2 x\right]v(x) - [u(x)\cdot(1+\tan x)]\cdot v'(x)}{v^2(x)} \end{aligned}$$

Luego,

$$f'(0) = \frac{[u'(0)(1+\tan 0) + u(0)\sec 0]v(0) - [u(0)(1+\tan 0)]v'(0)}{v^2(0)}$$

Usando que $u'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $v'(x) = v(x)$, $u(0) = 0$ y $v(0) = 1$, Obtenemos, $f'(0) = 1$.

2. (a)
   - (**(0.2 puntos)**)
     Dominio: $\mathbb{R}$.
   - (**(0.3 puntos)**)
     Paridad :

$$f(-x) = \frac{2\text{sen}\ (-x)}{(-x)^2 - \pi(-x)} = \frac{-2\text{sen}\ x}{x^2 + \pi x}.$$

     Como $f(-x) \neq f(x)$ y $f(-x) \neq -f(x)$, La función no es par ni impar.
   - **0.3 puntos**
     Ceros de f:

$$f(x) = 0 \iff \frac{2\,\text{sen}\, x}{x^2 - \pi x} = 0 \iff \begin{cases} \text{sen}\, x = 0 \\ x^2 - \pi x \neq 0 \end{cases} \iff x = k\pi, k \in \mathbb{Z} - \{0,1\}.$$

   (b)
   - **(0.4 puntos)**
     Existencia de asíntotas horizontales
     Como $-1 \leq \text{sen}\ x \leq 1$, tenemos que

$$\frac{-2}{x^2 - \pi x} \leq \frac{2\text{sen}\ x}{x^2 - \pi x} \leq \frac{2}{x^2 - \pi x},$$

     además,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\pm 2}{x^2 - \pi x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\pm 2}{x^2(1 - \pi/x)} = 0.$$

Entonces,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2\text{sen } x}{x^2-\pi x} = 0,$$

lo que implica que la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal.

- **(0.4 puntos)**
  Existencia de asíntotas verticales
  De la definición de la función se deduce que las posibles asíntotas verticales son las rectas $x = 0$ y $x = \pi$. Para ello debemos estudiar los límites en $x = 0$ y $x = \pi$.

- $$\lim_{x\to 0} \frac{2}{x^2-\pi x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\,\text{sen } x}{x} \frac{1}{(x-\pi)} = 2\cdot 1\cdot\left(\frac{1}{-\pi}\right) = -\frac{2}{\pi}.$$

  Por ser finito el límite la recta $x = 0$ no es una asíntota vertical

- Para calcular el siguiente límite se usará que $\text{sen } x = \text{sen } (\pi - x)$.

  $$\lim_{x\to\pi} \frac{2}{x^2-\pi x} = \lim_{x\to\pi} \frac{2\,\text{sen } (\pi-x)}{x(x-\pi)} = \lim_{x\to\pi} 2\cdot\frac{\text{sen } (\pi-x)}{(x-\pi)}\cdot\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{2}{\pi}.$$

  nuevamente, como el límite es finito, la recta $x = \pi$ no es una asíntota vertical.

La función no tiene asíntotas verticales.

(c) **(0.3 puntos)**
Continuidad de f si $x \in \mathbb{R} - \{0,\pi\}$: f es continua porque es el cuociente de las funciones continuas: $\text{sen } x$ y $x^2 - \pi x$.

(d) **(0.4 puntos)**
De los cálculos anteriores tenemos que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2}{\pi x - x^2} = -\frac{2}{\pi}$, por lo tanto f es continua en $x = 0$ si $a = -\frac{2}{\pi}$. Por la misma razón, $b = -\frac{2}{\pi}$.

(e) **(0.7 puntos)**

$$f'(x) = \frac{2(x^2-\pi x)\cos x - 2\text{sen } x(2x-\pi)}{(x^2-\pi x)^2}.$$

Por lo tanto,

$$f'(\pi/2) = \frac{2(\pi^2/4 - \pi^2/2)\cdot 0 - 2\cdot 0}{(\pi^2/4-\pi^2/2)^2} = 0.$$

Geométricamente esto significa que en el punto $\left(\frac{\pi}{2}\,,\, f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$ la recta tangente es paralela al eje X.