0.1 Sustituciones trigonométricas.-

Caso 1.- El integrando contiene una expresión de la forma $\sqrt{a^2+x^2}$.
Se sugiere la sustitución

$$\begin{aligned} x &= a\tan u \\ dx &= a\sec^2 u\, du \end{aligned}$$

de donde $\sqrt{a^2+x^2} = a\sec u$
$\int \frac{1}{(x^2+1)^{3/2}}dx$
Caso 2.- El integrando contiene una expresión de la forma $\sqrt{a^2-x^2}$.
Se sugiere la sustitución

$$\begin{aligned} x &= a\sin u \\ dx &= a\cos u\, du \end{aligned}$$

de donde $\sqrt{a^2-x^2} = a\cos u$
$\int \frac{1}{x^2\sqrt{25-x^2}}dx$
Caso 3.-El integrando contiene una expresión de la forma $\sqrt{x^2-a^2}$.
Se sugiere la sustitución

$$\begin{aligned} x &= a\sec u \\ dx &= a\sec u\tan u\, du \end{aligned}$$

de donde $\sqrt{x^2-a^2} = a\left|\tan u\right|$, con $0<u<\pi/2$ cuando $x>a$ y $\pi/2<u<\pi$ cuando $x<-a$.
$\int_{\sqrt{3}}^{2} \frac{\sqrt{x^2-3}}{x}dx = \int_0^{\pi/6} \sqrt{3}\tan^2 u\, du = 1-\frac{1}{6}\sqrt{3}\pi = .0\,931.$

Descomposición en suma de fracciones parciales.-
Para integrales de la forma

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}dx$$

donde $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios, con grado$p(x)$ <grado$q(x)$.

1. $\int_{-1}^{1/2} \frac{3}{x^2+x-2}dx = -\ln 5 - \ln 2 + C$

2. $\displaystyle\int \frac{x^2+12x+12}{x^3-4x}dx = -3\ln x + 5\ln(x-2) - \ln(x+2) + C$

3. $\displaystyle\int \frac{6x^2-3x+14}{x^3-2x^2+4x-8}dx = 4\ln(x-2) + \ln(x^2+4) + \tfrac{1}{2}\arctan\tfrac{1}{2}x + C$

4. $\displaystyle\int \frac{x^2+x+2}{(x^2+2)^2}dx = -\tfrac{1}{2(x^2+2)} + \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\arctan\tfrac{1}{2}x\sqrt{2} + C$

5. $\displaystyle\int \frac{e^x}{(e^x-1)(e^x+4)}dx = \tfrac{1}{5}\ln(e^x-1) - \tfrac{1}{5}\ln(e^x+4) + C$

Integrales impropias.-
(I) Caso intervalo de integración no acotado.
Si f es continua en el intervalo $[a,+\infty[$, entonces

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$$

Ejemplos.

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}dx$

2. Para $p\neq 1$, $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx$

3. $\displaystyle\int_1^{+\infty}(1-x)e^{-x}dx$

   $\displaystyle\int(1-x)e^{-x}dx = e^{-x}x + C$

Si f es continua en el intervalo $]-\infty,b]$, entonces

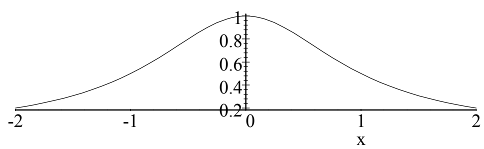
$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$$

Si f es continua en toda la recta real, entonces

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx$$

donde c es cualquier número real.

Ejemplo: $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1} dx$



$\frac{1}{x^2+1}$

(II) Caso función no acotada en el intervalo de integración

Si f es continua en el intervalo $]a, b]$ y es no acotada cerca de a

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c \to a^+} \int_c^b f(x)dx$$

Ejemplo: $\int_0^1 \ln x dx$.

Ejercicio.- $\int_0^{+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}(x+1)} dx$

0.2 Función Gamma.-

Para cada $t > 0$, la integral impropia

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} x^{t-1} dx$$

es convergente. De hecho, deben considerarse las integrales

$$\int_0^1 e^{-x} x^{t-1} dx \quad \text{y} \quad \int_1^{+\infty} e^{-x} x^{t-1} dx$$

Para la segunda integral, sean $f(x) = e^{-x} x^{t-1}$ y $g(x) = x^{-2}$. Se tiene entonces,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^{-x} x^{t-1}}{x^{-2}} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^{t+1}}{e^x} = 0 \qquad (*)$$

y luego, como $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$ converge, la integral de f también converge.
Para la primera integral, con $x = \frac{1}{u}$, $dx = -\frac{1}{u^2}du$

$$\begin{aligned} \int_c^1 e^{-x}x^{t-1}dx &= \int_{1/c}^1 e^{-1/u}u^{-t+1}\left(-u^{-2}\right)du \\ &= \int_1^{1/c} e^{-1/u}u^{-t-1}du \end{aligned}$$

y $\int_1^{+\infty} e^{-1/u}u^{-t-1}du$ converge, al comparar con $\int_1^{+\infty} u^{-t-1}du$ $(t > 0)$
* Este límite sale del resultado más general, para $a > 0,\ b > 0$:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} \frac{(\ln x)^b}{x^a} &= 0 \\ \lim_{x\to\infty} \left[\frac{x^b}{e^{ax}}\right] &= 0 \end{aligned}$$

Así entonces,

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{t-1}dx = \int_0^1 e^{-x}x^{t-1}dx + \int_1^{+\infty} e^{-x}x^{t-1}dx$$

Definition 1 *La función Gamma se define por* $\Gamma :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$

$$\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{t-1}dx$$

Exercise 2 *Para la función* Γ :
a) Calcule $\Gamma(1)$, $\Gamma(2)$
b) Usando integración por partes muestre que

$$\Gamma(t+1) = t \cdot \Gamma(t)$$

c) Deduzca que $\forall n \in \mathbb{N} : \Gamma(n) = (n-1)!$

0.3 Transformada de Laplace

Sea $f\ [0,\infty[\to \mathbb{R},\ t \to f(t)$ continua (por ahora). Se define la transformada de Laplace de f como la función

$$F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st}f(t)\,dt$$

definida para todos los s tales que la integral converge.

Obtenga la transformada de Laplace de las siguientes funciones:
a) $f(t) = 1$ b) $f(t) = t$ c) $f(t) = e^{at}$ d) $f(t) = \sin bt$.

Regla de L'Hôpital.-

Una forma indeterminada del tipo $\left(\frac{0}{0}\right)$ es un límite $\lim\limits_{x\to a^+}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]$, donde $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} g(x) = 0$.

Una forma indeterminada del tipo $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ es un límite $\lim\limits_{x\to a^+}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]$, donde $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$ y $\lim\limits_{x\to a^+} g(x) = \pm\infty$.

La regla de L'Hôpital entrega una poderosa herramienta para calcular límites de formas indeterminadas:

Theorem 3 *Sean $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ funciones derivables y $\lim\limits_{x\to a^+}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]$ una forma indeterminada $\left(\frac{0}{0}\right)$ o $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$*

$$\lim_{x\to a^+}\left[\frac{f'(x)}{g'(x)}\right] = L \Rightarrow \lim_{x\to a^+}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = L$$

donde L puede ser un número real (el límite existe) o bien L puede ser $+\infty$ o $-\infty$ (el límite diverge).

El teorema también vale para $F.I.$ con $\lim\limits_{x\to b^-}$, $\lim\limits_{x\to c}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}$ y $\lim\limits_{x\to-\infty}$

Algunos ejemplos importantes:

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{x}{e^x}\right]$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{x^n}{e^x}\right]$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{ax^n}{e^{bx}}\right]$
2. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{\frac{\sin x}{x}-1}{x}\right] = \lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{\sin x - x}{x^2}\right]$
3. $\lim\limits_{x\to 0^+}[x\ln x]$, $\lim\limits_{x\to 0^+}[x^x]$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

1 Aplicaciones de la integral.-

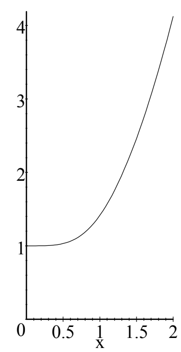
1.1 Definición de la integral de Riemann.-

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

Dada una partición $P : a < x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b$ del intervalo $[a, b]$ se escoje $\hat{x}_k \in [x_{k-1}, x_k]$ (un punto en cada subintervalo). Esto permite definir una suma de Riemann de f, asociada a la partición P por

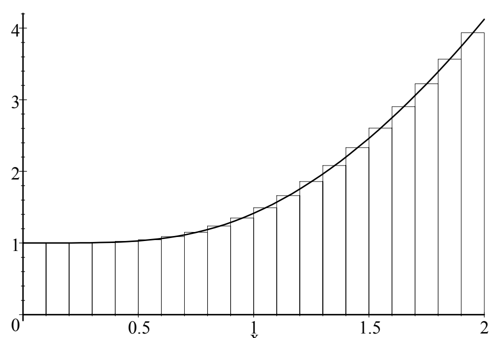
$$S(f, P) = \sum_{k=1}^{n} f(\hat{x}_k) \Delta x_k$$

Por ejemplo, con $f(x) = \sqrt{x^4 + 1},\ 0 \leq x \leq 2$



podemos construir la suma de Riemann:

con una partición que determine 20 subintervalos de igual longitud y escojiendo el punto medio de cada subintervalo



Para una partición P dada, llamamos **norma** de la la partición a la longitud del subintervalo más largo, la cual se denota $\|P\|$.

Que $\|P\| < \delta$, significa que para todos los subintervalos: $\Delta x_k < \delta$.

Un caso particular se tiene cuando todos los subintervalos tienen la misma longitud. La partición se denomina **regular** y se tiene

$$\|P\| = \frac{b-a}{n}$$

y por tanto,

$$\|P\| \to 0 \Leftrightarrow n \to \infty$$

Para una partición general

$$\frac{b-a}{\|P\|} \leq n$$

luego

$$\|P\| \to 0 \Rightarrow n \to \infty$$

y el recíproco no vale.

Definition 4 *Se dice que f es integrable Riemann en $[a,b]$ cuando existe un $L \in \mathbb{R}$ que verifica:*

$$\text{Dado } \varepsilon > 0, \text{ existe } \delta > 0 \text{ tal que}$$
$$\forall \text{ partición } P : \|P\| < \delta \Rightarrow \left| L - \sum_{k=1}^{n} f(\hat{x}_k)\, \Delta x_k \right| < \varepsilon$$
$$\text{cualquiera sea la elección de } \hat{x}_k \in [x_{k-1}, x_k]$$

Esta condición significa que

$$\lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\hat{x}_k)\, \Delta x_k = L$$

El valor de este límite se llama la **integral de** f en el intervalo $[a,b]$ y se escribe

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\hat{x}_k)\, \Delta x_k$$

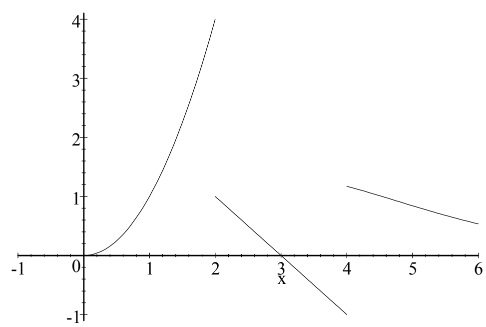
Theorem 5 *Toda función continua en $[a,b]$ es integrable en $[a,b]$.*

La clase de funciones integrables en $[a,b]$ es más amplia que la indicada en el teorema anterior. Se puede probar que también son integrables las funciones continuas por tramos.

Una función f es continua por tramos (o seccionalmente continua) en el intervalo $[a,b]$, cuando ella es continua en todo punto del intervalo, con la posible excepción de un número finito de puntos $t_1, t_2, ..., t_k$ donde los límites laterales deben existir.

Por ejemplo,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ 3 - x & \text{si } 2 \leq x \leq 4 \\ x^3 e^{-x} & \text{si } 4 < x \leq 6 \end{cases}$$



La integral se calcula en este caso como

$$\begin{aligned} \int_0^6 f(x)\,dx &= \int_0^2 x^2 dx + \int_2^4 (3-x)\,dx + \int_4^6 x^3 e^{-x} dx \\ &= \frac{8}{3} + 0 - 366e^{-6} + 142e^{-4} \end{aligned}$$

1.2 Aplicaciones de la integral.

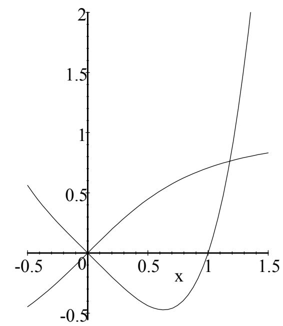
1.2.1 Area entre curvas

Sea R la región del plano descrita por

$$\begin{aligned} a &\leq x \leq b \\ g(x) &\leq y \leq f(x) \end{aligned}$$

donde $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ son continuas.

Por ejemplo,



Para calcular el área de R tomamos una partición $P : a = x_0 < x_1 < .... < x_n = b$ de $[a, b]$ y elejimos $\hat{x}_k \in [x_{k-1}, x_k]$. Sobre cada subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$, consideramos el rectángulo de área

$$[f(\hat{x}_k) - g(\hat{x}_k)]\,\Delta x_k$$

La suma

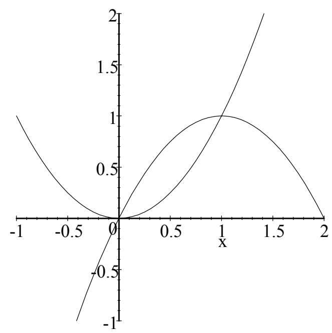
$$\sum_{k=1}^{n} [f(\hat{x}_k) - g(\hat{x}_k)]\,\Delta x_k$$

es una suma de Riemann de la función $f(x) - g(x)$.

Ahora cuando $\|P\| \to 0$, los rectángulos van "llenando" la región R como también las sumas de Riemann se aproximan al valor de la integral de la función. Por esto

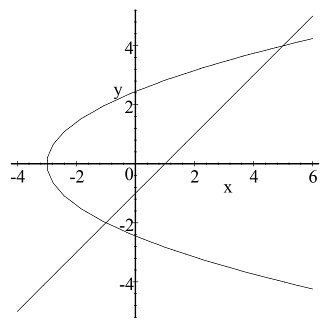
$$A(R) = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$$

Example 6 *Encuentre el área de la región acotada por las parábolas* $y = x^2$ *e* $y = 2x - x^2$.



$A(R) = \int_0^1 (2x - x^2 - x^2)\, dx = \frac{1}{3}$

Example 7 *Encuentre el área de la región encerrada por la recta* $y = x - 1$ *y la parábola* $y^2 = 2x + 6$



$A(R) = \int_{-2}^{4} \left(y + 1 - \frac{y^2}{2} + 3 \right) dy = 18$