0.1 Integrales con $\ln x$ y e^x.-

Con $h(x) = \ln|x| = \begin{cases} \ln x & \text{si} \quad x > 0 \\ \ln(-x) & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$ se tiene $h'(x) = \dfrac{1}{x}$. Luego,

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

válido para un intervalo I con $0 \notin I$.

De aquí, si f es derivable en un intervalo y no se anula

$$\begin{aligned} \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx &= \int \frac{1}{u} du && (\text{con } u = f(x)) \\ &= \ln|u| + C \\ &= \ln|f(x)| + C \end{aligned}$$

Ejemplos.-

1. $\int \frac{2x}{x^2+1} dx = \ln(x^2+1) + C$ con $u = x^2 + 1$

2. $\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{1}{u} du$ con $u = \cos x$
$= -\ln|u| + C = -\ln|\cos x| + C = \ln|\sec x| + C.$

3. $\int \sec x dx = \int \sec x \left(\frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x} \right) dx = \int \frac{\sec x \tan x + \sec^2 x}{\sec x + \tan x} dx$
$= \ln|\sec x + \tan x| + C.$

La función $\ln : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ es biyectiva. Su inversa es

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\to (0, +\infty) \subset \mathbb{R} \\ x &\mapsto e^x \end{aligned}$$

Si aceptamos que es derivable, podemos usar derivación implícita (con respecto a x) en la ecuación $x = \ln y$ que equivale a $y = e^x$ y obtener

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} \\ \frac{dy}{dx} &= y \end{aligned}$$

O sea, $\dfrac{d}{dx}[e^x] = e^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

De aquí, para una f derivable, $\frac{d}{dx}\left[e^{f(x)}\right] = e^{f(x)} f'(x)$, y luego

$$\int e^{f(x)} f'(x) dx = e^{f(x)} + C$$

Ejemplos.-

1. $\int x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int e^u du$ con $u = x^2$
   $= \frac{1}{2} e^u + C = \frac{1}{2} e^{x^2} + C.$

2. $\int e^x \sqrt{1 - e^x} dx = -\frac{2}{3} \left(\sqrt{(1 - e^x)} \right)^3 + C.$

0.2 Integrales con trigonométricas inversas.-

De las fórmulas de derivación de las funciones inversas trigonométricas:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[\arctan x] &= \frac{1}{x^2+1}, \ \forall x \in \mathbb{R} \\ \frac{d}{dx}[\arcsin x] &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \ -1 < x < 1 \end{aligned}$$

se pueden obtener las fórmulas integrales:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2+a^2} dx &= \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C \\ \int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx &= \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C \end{aligned}$$

Queda de ejercicio deducir la fórmula

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-a^2}} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arcsec}\left(\frac{|x|}{a}\right) + C$$

Ejercicios.-

1.- Calcular $\displaystyle\int \frac{3x^3-2}{x^2+4} dx.$

Desarrollo: $\frac{3x^3-2}{x^2+4}$
$\int \dfrac{3x^3-2}{x^2+4} dx$
2.- Calcular $\int \dfrac{1}{x^2-4x+7} dx.$

Desarrollo: $x^2 - 4x + 7 = (x-2)^2 + 3$

$\int \frac{1}{x^2-4x+7}dx = \int \frac{1}{(x-2)^3+3}dx = \int \frac{1}{u^3+3}du$ con $u = x-2,\ a = \sqrt{3}$

$= \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{x-2}{\sqrt{3}}\right) + C.$

0.3 Integración por partes.-

De la fórmula para derivar un producto

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

se obtiene

$$f(x)g'(x) = \frac{d}{dx}[f(x)g(x)] - g(x)f'(x)$$

lo que implica (integrando a ambos lados)

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx$$

Con

$$\begin{aligned} u &= f(x) \quad , \quad v = g(x) \\ du &= f'(x)dx \ \ , \ dv = g'(x)dx \end{aligned}$$

la fórmula se escribe

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Ejemplos.-

1. $\int xe^x dx = xe^x - e^x + C$
2. $\int x^2 \sin x dx = -x^2 \cos x + 2\cos x + 2x \sin x + C$
3. $\int x \ln x dx = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$
4. $\int e^x \sin x dx = -\frac{1}{2}e^x \cos x + \frac{1}{2}e^x \sin x + C$

0.4 Integrales de tipo trigonométrico.-

(I) Caso $\int \sin^m x \cos^n x dx$, con $m, n \geq 0$ enteros.
$\int \sin^4 x \cos^3 x dx$
$\int \sin^2 x dx$
$\int \cos^2 x dx$
(II) Caso $\int \sec^m dx \tan^n x dx$,con $m, n \geq 0$ enteros.

m par: $\int \sec^4 x \tan^3 x dx = \int \sec^2 x \tan^3 x (\sec^2 x) dx$
$= \int (1 + \tan^2 x) \tan^3 x (\sec^2 x) dx$.

$m = 0$ y n par: $\int \tan^4 x dx = \int \tan^2 x \left(\sec^2 x - 1\right) dx = \int \tan^2 x \sec^2 x dx - \int \left(\sec^2 x - 1\right) dx$