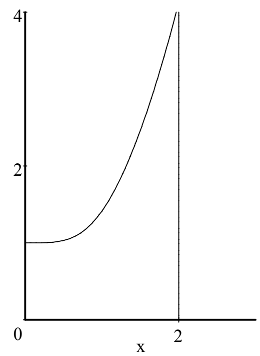
1 La Integral.-

1.1 Definición e interpretación geométrica

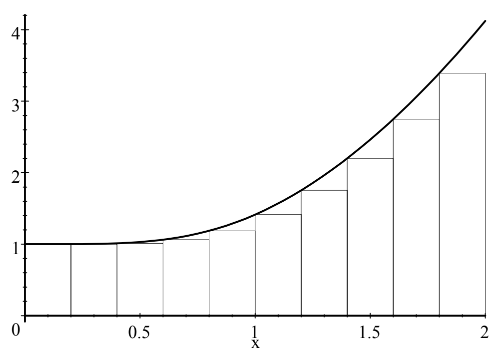
Dada una función continua $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ y no negativa
$(f(x) \geq 0, \ \forall x \in [a,b])$, vamos a considerar la región del plano "bajo la gráfica de f", $R = \{(x,y) : a \leq x \leq b \ \wedge \ 0 \leq y \leq f(x)\}$.

La siguiente gráfica corresponde a $f(x) = \sqrt{x^4+1}, \ 0 \leq x \leq 2$.



Problema.-¿Cómo calcular el área de la región R?

La idea general consiste en **aproximar** la región R por una región formada por rectángulos tal como se muestra en la siguiente figura:



Podemos calcular el área de cada rectángulo y mediante la suma de estas áreas aproximar el área de la región R. Es intuitivamente claro que cuanto mayor sea la cantidad de rectángulos considerados, mejor será la aproximación obtenida. Finalmente, mediante un proceso de "límite" que se explicará en la definición más general del concepto de integral se define el área de R.

Definición 1 *Una partición del intervalo* $[a, b]$ *es un conjunto*

$$\mathcal{P} = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_n\}$$

de $n+1$ *puntos tales que*

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$$

La partición $\mathcal{P}$ *divide al intervalo* $[a, b]$ *en* n *subintervalos* $[x_{k-1}, x_k]$, *con* $1 \leq k \leq n$, *cada uno de longitud*

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$$

Ahora tomamos una partición $\mathcal{P}$ del intervalo $[a, b]$ y para la función continua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ consideramos:
sobre cada subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$,

$$\begin{aligned} m_k &= \min \{f(x) : x_{k-1} \leq x \leq x_k\} \\ M_k &= \max \{f(x) : x_{k-1} \leq x \leq x_k\} \end{aligned}$$

Los productos $m_k \cdot \Delta x_k$ y $M_k \cdot \Delta x_k$ representan las áreas de los rectángulos de base $[x_{k-1,} x_k]$ y altura m_k y M_k respectivamente. Con estos elementos podemos definir los conceptos de suma inferior y suma superior de f.

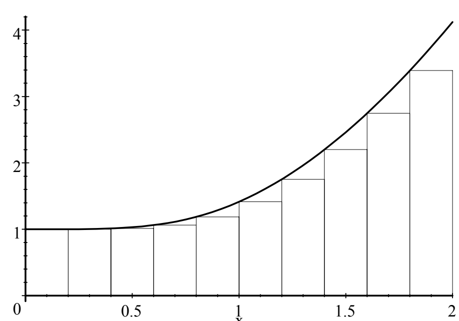
La suma inferior de f asociada a la partición $\mathcal{P}$ es

$$\underline{S}(f, \mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{n} m_k \cdot \Delta x_k$$

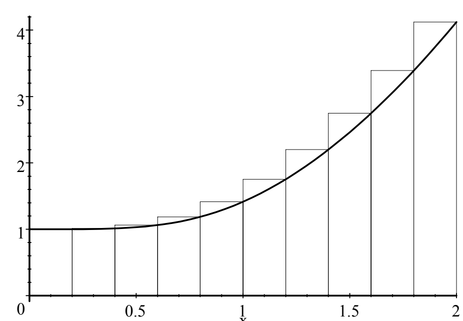
y la suma superior de f asociada a $\mathcal{P}$ es

$$\bar{S}(f, \mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{n} M_k \cdot \Delta x_k$$

Los siguientes gráficos representan una suma inferior y una suma superior para $f(x) = \sqrt{x^4 + 1}$, $0 \leq x \leq 2$



Suma inferior de f asociada a $\mathcal{P}$



Suma superior de f asociada a $\mathcal{P}$

Es evidente que

$$\underline{S}\,(f,\mathcal{P}) \leq \text{Area}\,(R) \leq \bar{S}\,(f,\mathcal{P})$$

Una propiedad importante de estas sumas es el efecto que se produce al agregarle puntos a la partición $\mathcal{P}$, o sea al **refinar** la partición.

Considere por ejemplo que agregamos un punto $\hat{x} \in\,]x_{k-1}, x_k[$ a la partición $\mathcal{P}$, para obtener una nueva partición $\mathcal{Q}$. Es fácil demostrar que $\underline{S}(f,\mathcal{P}) \leq \underline{S}(f,\mathcal{Q})$. O sea, la suma inferior crece y lo mismo ocurre si agregamos un número finito de puntos a la partición $\mathcal{P}$.

Queda de ejercicio demostrar que la suma superior decrece, al refinar una partición.

En resumen, si $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ son dos particiones del intervalo $[a,b]$, con $\mathcal{P} \subset \mathcal{Q}$ ($\mathcal{Q}$ refina a $\mathcal{P}$), entonces

$$\underline{S}\,(f,\mathcal{P}) \leq \underline{S}\,(f,\mathcal{Q}) \leq \bar{S}\,(f,\mathcal{Q}) \leq \bar{S}\,(f,\mathcal{P})$$

Theorem 2 *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua, entonces **existe único** número real I tal que*

$$\forall \textit{ partición } \mathcal{P} \textit{ de } [a,b] : \underline{S}(f,\mathcal{P}) \leq I \leq \bar{S}\,(f,\mathcal{P})$$

Este número I define el área de la región R, como también el concepto de *integral de f en el intervalo* $[a,b]$. Se escribe

$$\text{Area}\,(R) = I = \int_a^b f\,(x)\,dx$$

Mediante los conceptos de Suma Inferior y de Suma Superior hemos llegado a la definición de

$$\int_a^b f(x)dx$$

donde $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función continua.

El símbolo $\int_a^b f(x)dx$ representa la "Integral de f sobre el intervalo $[a,b]$". Observe que la letra x es sólo una referencia a los elementos del dominio de la función, por lo tanto puede ser reemplazado por cualquier otro símbolo. Así, podemos escribir

$$\int_a^b f(x)dx \equiv \int_a^b f(t)dt \equiv \int_a^b f(\xi)d\xi$$

(los tres símbolos representan lo mismo).

Example 3 *Use la definición para demostrar que*

$$\int_a^b x dx = \frac{1}{2}\left(b^2 - a^2\right)$$

Sea $\mathcal{P} : a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ *una partición de* $[a, b]$. *Para* $f(x) = x$ *se tiene, en cada subintervalo* $[x_{k-1}, x_k]$

$$m_k = x_{k-1}\ ,\ M_k = x_k$$

y además

$$x_{k-1} < \frac{1}{2}(x_k + x_{k-1}) < x_k$$

Luego,

$$\begin{aligned} \underline{S}(f, \mathcal{P}) &= \sum_{k=1}^{n} m_k \cdot \Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} x_{k-1}(x_k - x_{k-1}) \\ &< \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}(x_k + x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(x_k^2 - x_{k-1}^2\right) = \frac{1}{2}\left(b^2 - a^2\right) \end{aligned}$$

y en forma similar

$$\frac{1}{2}\left(b^2 - a^2\right) < \bar{S}(f, \mathcal{P})$$

Esto muestra que

$$\int_a^b x dx = \frac{1}{2}\left(b^2 - a^2\right)$$

Usando la definición del concepto de integral se pueden DEDUCIR sus propiedades más básicas:

1. $\int_a^b c\, dx = c(b - a)$.

   Obs.- $\int_a^b 0\, dx = 0$

2. Para f continua sobre un intervalo cerrado que contiene a los puntos a, b y c se tiene:

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

   Ejemplo.- Para $f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad 1 \leq x \leq 3 \\ 3 & \text{si} \quad 3 < x \leq 6 \end{cases}$ (continua sobre $[1, 6]$) se tiene

$$\begin{aligned} \int_1^6 f(x)dx &= \int_1^3 f(x)dx + \int_3^6 f(x)dx \\ &= \int_1^3 x\,dx + \int_3^6 3dx \\ &= \frac{1}{2}\left(3^2 - 1^2\right) + 3(6-3) \\ &= 13 \end{aligned}$$

3. (Monotonía) Si $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ son continuas con

$$\forall x \in [a, b] : g(x) \leq f(x)$$

   entonces

$$\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx$$

   En particular, $f(x) \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0$

4. Teorema del valor medio para integrales.- Dada $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua, existe $c \in [a, b]$ tal que:

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b - a)$$

   Obs.- El valor $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = f(c)$ se denomina valor promedio de f sobre $[a, b]$.

2 Teorema fundamental del Cálculo.

Si consideramos la función identidad $f(x) = x$ sobre un intervalo I y elegimos $a \in I$, podemos definir $F : I \to \mathbb{R}$ por

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

$\int_a^x f(t)dt$ es la integral de la función f sobre el intervalo $[a, x]$ (de extremos a y x). Así

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_a^x f(t)dt = \int_a^x tdt \\ &= \frac{1}{2}\left(x^2 - a^2\right) \\ &= \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}a^2 \end{aligned}$$

donde a es una constante. ¿Qué relación hay entre las funciones $f(x) = x$ y $F(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}a^2$?

Theorem 4 *(Teorema fundamental del Cálculo).*
Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función continua y $c \in I$ un valor fijo. Se define la función $F : I \to \mathbb{R}$ por

$$F(x) = \int_c^x f(t)dt$$

Se tiene entonces que F es derivable y $\forall x \in I$:

$$F'(x) \equiv \frac{d}{dx}\left[\int_c^x f(t)dt\right] = f(x)$$

Dem.- Para $x_0 \in I$ tenemos:

$$\begin{aligned} F'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{\int_c^x f(t)dt - \int_c^{x_0} f(t)dt}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{\int_{x_0}^x f(t)dt}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} f(c(x)) \quad \text{, donde } c(x) \text{ es un punto entre } x_0 \text{ y } x \\ &= f(x_0) \end{aligned}$$

Obs.- El TFC indica que toda función continua posee una ANTIDERIVADA. ($F : I \to \mathbb{R}$ es una antiderivada de f cuando $\forall x \in I : F'(x) = f(x)$).

Aplicación.- Con la función $f(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$ se define

$$\begin{array}{rcl} F & : & (0,\infty) \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto & F(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt \end{array}$$

Esta función es derivable con:

$$\begin{array}{rcl} F'(x) & = & \frac{1}{x} \\ F''(x) & = & -\frac{1}{x^2} \end{array}$$

Luego, F es creciente y su gráfico cóncavo hacia abajo.

Además, $F(1) = 0$ y se puede probar que

$$\begin{array}{rcl} \lim_{x\to\infty} F(x) & = & +\infty \\ \lim_{x\to 0^+} F(x) & = & -\infty \end{array}$$

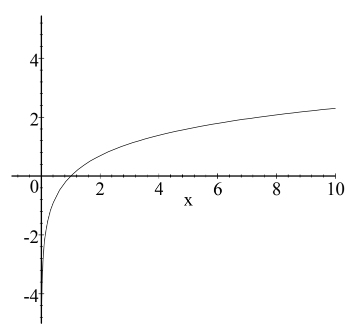
lo que indica que $\mathrm{Rec}F = \mathbb{R}$.

Esta función F se denomina Logaritmo Natural y se denota $\ln$. Así,

$$\begin{array}{rcl} \ln & : & (0,\infty) \to \mathbb{R} \\ \ln x & = & \int_1^x \frac{1}{t} dt \end{array}$$

con $\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$.

Gráfico de $\ln .-$



$\ln x$

En términos más generales, una consecuencia del TFC es el siguiente corolario.

Corollary 5 *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Si F es "cualquier" antiderivada de f , entonces*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Dem.- La función $G(x) = \int_a^x f(t)dt$ del TFC es una antiderivada de f, al igual que F. Luego, la diferencia entre ambas es una constante. Así,

$$G(x) = F(x) + C$$

y evaluando en $x = a$

$$0 = G(a) = F(a) + C \Rightarrow C = -F(a)$$

y $G(x) = F(x) - F(a)$. Finalmente evaluando en $x = b$

$$G(b) = \int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

Notación: $F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$.

A la vista de este resultado, el problema de calcular una integral se transforma en la determinación de una antiderivada (cualquiera) de la función integrando.

3 Integral indefinida.-

$$\int f(x)dx = F(x) + C \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{d}{dx}[F(x)] = f(x)$$

Esta equivalencia determina las siguientes propiedades de la integral:

1. $\displaystyle\int [f(x) + g(x)]\, dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

2. $\displaystyle\int cf(x)dx = c\int f(x)dx$

   Obs.- Ambas propiedades determinan que el "Operador Integral": $\displaystyle\int$ es un **Operador Lineal** (transformación lineal).

Estas dos propiedades también son válidas para integrales definidas (con límites de integración).

También ambas propiedades se generalizan a (una combinación lineal)

$$\int [c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + ... + c_n f_n(x)]\, dx = c_1 \int f_1(x)dx + c_2 \int f_2(x)dx + ... + c_n \int f_n(x)dx$$

Como caso particular, se tiene para un polinomio:

$$\int \left[a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0\right] dx$$
$$= \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n}x^n + ... + \frac{a_2}{3}x^3 + \frac{a_1}{2}x^2 + a_0 x + C$$

Por ejemplo,

1.- $\int (4x^3 - 2x^2 + \pi x + 5)\, dx$

2.- $\int_{-1}^{2} (4x^3 - 2x^2 + \pi x + 5)\, dx$

3.- $\int \left(5\sqrt{x} + \frac{2}{x} - 4\cos x\right) dx$

4.- $\int_{1}^{\pi} \left(5\sqrt{x} + \frac{2}{x} - 4\cos x\right) dx$

5.- Encontrar el área de la región encerrada por la curva $y = -2x^2 - 2x + 4$ y el eje x

3.1 Método de sustitución.-

Según el TFC para evaluar $\int_a^b f(x)dx$ basta encontrar una antiderivada de la función integrando f. En todos los casos mostrados anteriormente la determinación de la antiderivada es casi directa. Sin embargo, hay situaciones en que esto puede ser bastante más complicado. Piense, por ejemplo, en el cálculo de

$$\int_1^3 x\sqrt{2x+1}dx \quad \text{, o de}$$
$$\int_0^{\pi/4} \tan x dx$$

No es fácil encontrar “a ojo” una antiderivada de la función integrando.

Veremos cómo el método de sustitución permite resolver estas integrales.

Este método es consecuencia de la regla de la cadena:

$$\frac{d}{dx}\left[G(f(x))\right] = G'(f(x)) \cdot f\,'(x)$$

Si en la fórmula anterior consideramos una función g con antiderivada G, esta queda

$$\frac{d}{dx}\left[G(f(x))\right] = g(f(x)) \cdot f\,'(x)$$

lo que puede escribirse

$$\int g(f(x))f\,'(x)\; dx = G(f(x)) + C$$

Observe que esta fórmula puede deducirse con el siguiente procedimiento:

Usando la sustitución

$$\begin{aligned} u &= f(x) \\ du &= f\,'(x)dx \end{aligned}$$

se tiene

$$\begin{aligned} \int g(f(x))f\,'(x)\; dx &= \int g(u)du \\ &= G(u) + C \\ &= G(f(x)) + C \end{aligned}$$

Ejemplos.-

1.- $\int 3x\sqrt{x^2+4}dx$

2.- $\int x\sqrt{2x+1}dx$

3.- $\int_1^3 x\sqrt{2x+1}dx$

Obs.- El método de sustitución puede usarse para calcular intergrales definidas, de hecho:

$$\begin{aligned} \int_a^b g(f(x))f\,'(x)\; dx &= G\left(f(x)\right)|_a^b \\ &= G\left(f(b)\right) - G\left(f(a)\right) \\ \int_{f(a)}^{f(b)} g(u)du &= G(u)|_{f(a)}^{f(b)} \\ &= G\left(f(b)\right) - G\left(f(a)\right) \end{aligned}$$

Luego

$$\int_a^b g(f(x))f\,'(x)\;dx = \int_{f(a)}^{f(b)} g(u)du$$

fórmula que se conoce como Teorema del cambio de variable.

Ejemplo.-

$$\int_0^1 \frac{x^5}{\left(x^6+1\right)^3}dx$$