

1 INTEGRACION

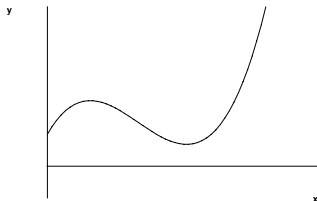
En este capítulo usaremos el problema de calcular el área para motivar la definición de la integral definida. Usaremos la integral definida para definir el área de una región. Finalmente, el Teorema Fundamental del Cálculo nos proveerá de un método simple para encontrar el valor de muchas integrales definidas.

1.1 Preparación para la integral definida

Consideremos una región R acotada por el gráfico de una función

$$f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

continua y no negativa; y el eje x .



Definición.- Una partición de $[a, b]$ es un conjunto finito de puntos

$$\{x_0, x_1, \dots, x_n\}, n \in \mathbb{N}$$

tales que $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Escribimos

$$\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$$

Ejemplos.- $\mathcal{P}_1 = \{0, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 2\}$ y $\mathcal{P}_2 = \{0, \frac{4}{5}, 1, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, 2\}$ son particiones del intervalo $[0, 2]$.

Una partición $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ del intervalo $[a, b]$ divide a este en n subintervalos $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$.

Notación.- $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$: longitud del k -ésimo subintervalo.

Sumas superiores e inferiores

Sea $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ una partición del intervalo $[a, b]$. Sea m_k el menor valor que toma f sobre $[x_{k-1}, x_k]$ (tal m_k existe ya que f es continua sobre ese intervalo). Sea R_k el rectángulo de altura m_k y base Δx_k , entonces R_k es el mayor de los rectángulos que pueden inscribirse en R sobre el intervalo $[x_{k-1}, x_k]$. Hacemos esta operación para cada subintervalo, de manera que obtenemos n rectángulos $R_1, R_2, \dots, R_n$ todos inscritos en la región R .

Definición.- Llamamos suma inferior de f asociada a la partición $\mathcal{P}$ a la suma

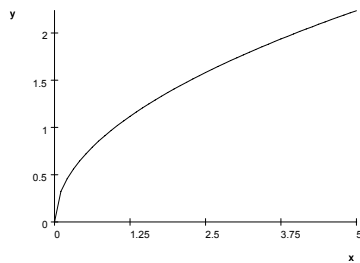
$$s(f, \mathcal{P}) = m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 + \dots + m_n \Delta x_n$$

Observaciones.-

1. $s(f, \mathcal{P}) \leq \text{área}(R)$, dada cualquier partición $\mathcal{P}$ del intervalo $[a, b]$.
2. Dadas dos particiones $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ del intervalo $[a, b]$. Si $\mathcal{P}_1 \subseteq \mathcal{P}_2$, entonces $s(f, \mathcal{P}_1) \leq s(f, \mathcal{P}_2)$.
3. A medida que la base de los rectángulos se van achicando, la suma de las áreas de ellos se aproxima más al área de R .

Ejemplo.- Sea $f(x) = \sqrt{x}, x \in [0, 2]$. Sea $\mathcal{P} = \{0, \frac{1}{4}, \frac{4}{9}, \frac{9}{16}, 1, \frac{25}{16}, 2\}$. Encontrar un valor aproximado de $s(f, \mathcal{P})$.

Solución.- $x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{4}, x_2 = \frac{4}{9}, x_3 = \frac{9}{16}, x_4 = 1, x_5 = \frac{25}{16}, x_6 = 2$.



$$m_1 = f(x_0) = 0, m_2 = f(x_1) = \frac{1}{2}, m_3 = f(x_2) = \frac{2}{3}, m_4 = f(x_3) = \frac{3}{4}, m_5 = f(x_4) = 1, m_6 = f(x_5) = \frac{5}{4}$$

$$\Delta x_1 = \frac{1}{4}, \Delta x_2 = \frac{7}{36}, \Delta x_3 = \frac{17}{144}, \Delta x_4 = \frac{7}{16}, \Delta x_5 = \frac{9}{16}, \Delta x_6 = \frac{7}{16}.$$

Por lo tanto

$$s(f, \mathcal{P}) = m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 + \dots + m_n \Delta x_n \approx 1.614.$$

Observación.- El valor real de la región R bajo la curva de ecuación

$$f(x) = \sqrt{x}, x \in [0, 2],$$

sobre el eje x , es $\frac{4}{3}\sqrt{2} \approx 1.885$.

En forma análoga a como se definió la suma inferior podemos definir la suma superior considerando rectángulos circunscritos a la región R .

Sea $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ una partición del intervalo $[a, b]$. Sea M_k el mayor valor que toma f sobre $[x_{k-1}, x_k]$

Definición.- Llamamos suma superior de f asociada a la partición $\mathcal{P}$ a la suma

$$S(f, \mathcal{P}) = M_1 \Delta x_1 + M_2 \Delta x_2 + \dots + M_n \Delta x_n$$

Observaciones.-

1. $S(f, \mathcal{P}) \geq \text{área}(R)$, dada cualquier partición $\mathcal{P}$ del intervalo $[a, b]$.
2. Dadas dos particiones $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ del intervalo $[a, b]$. Si $\mathcal{P}_1 \subseteq \mathcal{P}_2$, entonces $S(f, \mathcal{P}_1) \geq S(f, \mathcal{P}_2)$.
3. A medida que la base de los rectángulos se van achicando, la suma de las áreas de ellos se aproxima más al área de R .

4. $s(f, \mathcal{P}) \leq \text{área}(R) \leq S(f, \mathcal{P})$ dada cualquier partición $\mathcal{P}$ del intervalo $[a, b]$.

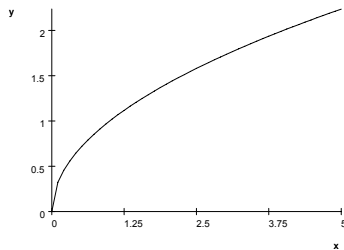
5. si $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ son dos particiones del intervalo $[a, b]$, entonces

$$s(f, \mathcal{P}_1) \leq S(f, \mathcal{P}_2).$$

6. Si $\mathcal{P}_1 \subseteq \mathcal{P}_2$, entonces $s(f, \mathcal{P}_1) \leq s(f, \mathcal{P}_2) \leq S(f, \mathcal{P}_2) \leq S(f, \mathcal{P}_1)$.

Ejemplo.- Sea $f(x) = \sqrt{x}, x \in [0, 2]$. Sea $\mathcal{P} = \{0, \frac{1}{4}, \frac{4}{9}, \frac{9}{16}, 1, \frac{25}{16}, 2\}$. Encontrar un valor aproximado de $S(f, \mathcal{P})$.

Solución.- $x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{4}, x_2 = \frac{4}{9}, x_3 = \frac{9}{16}, x_4 = 1, x_5 = \frac{25}{16}, x_6 = 2$.



$$M_1 = f(x_1) = \frac{1}{2}, M_2 = f(x_2) = \frac{2}{3}, M_3 = f(x_3) = \frac{3}{4}, M_4 = f(x_4) = 1, M_5 = f(x_5) = \frac{5}{4}, M_6 = f(x_6) = \sqrt{2}$$

$$\Delta x_1 = \frac{1}{4}, \Delta x_2 = \frac{7}{36}, \Delta x_3 = \frac{17}{144}, \Delta x_4 = \frac{7}{16}, \Delta x_5 = \frac{9}{16}, \Delta x_6 = \frac{7}{16}.$$

Por lo tanto

$$S(f, \mathcal{P}) = M_1 \Delta x_1 + M_2 \Delta x_2 + \dots + M_n \Delta x_n \approx 2.105.$$

1.2 La integral definida

Definición.- Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, una función continua. Definimos la suma inferior y superior de f c/r a la partición $\mathcal{P}$ de $[a, b]$ por

$$s(f, \mathcal{P}) = m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 + \dots + m_n \Delta x_n$$

$$S(f, \mathcal{P}) = M_1 \Delta x_1 + M_2 \Delta x_2 + \dots + M_n \Delta x_n$$

donde $(\forall k = 1, \dots, n)$, m_k y M_k son los valores de mínimo y de máximo de f en el k -ésimo subintervalo.

Observación.-

1. Si $\mathcal{P}_1 \subseteq \mathcal{P}_2$, entonces $s(f, \mathcal{P}_1) \leq s(f, \mathcal{P}_2) \leq S(f, \mathcal{P}_2) \leq S(f, \mathcal{P}_1)$.
2. Es posible probar que existe (cuando f es continua) un único número I mayor o igual que todas las sumas inferiores y menor o igual que todas las sumas superiores.
3. Para f es continua el número I de la observación anterior satisface:

$$I = \sup_{\mathcal{P} \in P[a, b]} \{s(f, \mathcal{P})\} = \inf_{\mathcal{P} \in P[a, b]} \{S(f, \mathcal{P})\}$$

donde $P[a, b]$ es la colección de todas las particiones del intervalo $[a, b]$.

Definición.- Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. La integral definida de f es el único número I que satisface:

$$s(f, \mathcal{P}) \leq I \leq S(f, \mathcal{P})$$

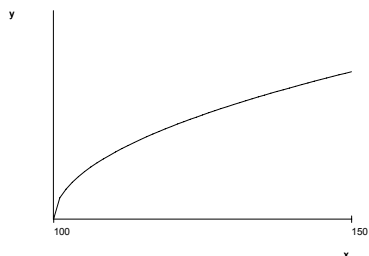
para toda partición $\mathcal{P}$ del intervalo $[a, b]$. Esta integral se denota por

$$\int_a^b f(x) dx$$

Observación.-

1. $\int$ se llama símbolo integral
2. a y b se llaman límites de integración
3. f se llama integranda
4. También es posible definir la integral para integrandas que no sean continuas.
5. Por simplicidad supondremos a través de este capítulo que la integranda es continua.

Definición.- Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua y no negativa sobre $[a, b]$ y sea R la región acotada por el gráfico de f , el eje x y las rectas $x = a$ y $x = b$.



Se define el área de R por

$$\text{área}(R) = \int_a^b f(x) \, dx$$

Ejemplo.- Sea $f(x) = c$, $a \leq x \leq b$. Muestre que

$$\int_a^b c \, dx = c(b - a)$$

Solución.- Sea $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ una partición del intervalo $[a, b]$, se tiene

$$(\forall k = 1, 2, \dots, n) \, m_k = c,$$

$$\begin{aligned} s(f, \mathcal{P}) &= m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 + \dots + m_n \Delta x_n \\ &= c(\Delta x_1 + \Delta x_2 + \dots + \Delta x_n) \\ &= c(x_n - x_1) \\ &= c(b - a) \end{aligned}$$

Análogamente, $S(f, \mathcal{P}) = c(b - a)$.

Luego para partición $\mathcal{P}$ del intervalo $[a, b]$ tenemos:

$$s(f, \mathcal{P}) \leq c(b - a) \leq S(f, \mathcal{P})$$

Por lo tanto,

$$\int_a^b c \, dx = c(b - a)$$

Definición.- Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua, se define:

$$\int_a^a f(x) \, dx = 0 \quad \text{y} \quad \int_b^a f(x) \, dx = - \int_a^b f(x) \, dx$$

Proposición.- Sean f y g continuas sobre $[a, b]$ y supongamos que

$$f(x) \leq g(x), \, a \leq x \leq b.$$

Se tiene:

$$\text{a) } (\forall \mathcal{P} \in \mathcal{P}[a, b]) \, s(f, \mathcal{P}) \leq s(g, \mathcal{P}) \quad \text{y} \quad S(f, \mathcal{P}) \leq S(g, \mathcal{P})$$

$$\text{b) } \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

Demostración.-

- (a) Sea $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ una partición del intervalo $[a, b]$ y sean m_k y m'_k los valores de máximo y de mínimo de f y g respectivamente sobre $[x_{k-1}, x_k]$. Entonces $m_k \leq m'_k$ ($f(x) \leq g(x)$ sobre $[x_{k-1}, x_k]$) y

$$s(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n m'_i \Delta x_i = s(g, \mathcal{P})$$

En forma análoga, $S(f, \mathcal{P}) \leq S(g, \mathcal{P})$.

- (b) Supongamos que $\int_a^b f(x) dx > \int_a^b g(x) dx$, entonces para toda partición $\mathcal{P}$ del intervalo $[a, b]$,

$$s(g, \mathcal{P}) \leq \int_a^b g(x) dx < \int_a^b f(x) dx \leq S(f, \mathcal{P}) \leq S(g, \mathcal{P})$$

Esto muestra que hay dos números distintos entre $s(g, \mathcal{P})$ y $S(g, \mathcal{P})$, lo que contradice la definición de integral definida. Luego necesariamente

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

1.3 Propiedades de la integral definida

Teorema.- Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

Demostración.- Ver Ellis - Gulick. (Note que para f nonegativa la demostración es inmediata ya que cada integral representa el área de la región entre la curva y el eje x sobre el intervalo que corresponde).

Teorema (Propiedad de comparación).-

Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua y sean $m, M \in \mathbb{R}$ tales que

$$(\forall x \in [a, b]) m \leq f(x) \leq M.$$

Entonces

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

Demostración.-

$$m(b-a) = \int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M \leq M(b-a)$$

Observación.-

1. Tales números m y M existen porque f es continua sobre $[a, b]$.
2. Geométricamente el teorema dice que el área de una región es mayor o igual que el área del rectángulo inscrito y es menor o igual que el área del rectángulo circunscrito.
3. $m(b-a)$ y $M(b-a)$ son cotas inferior y superior respectivamente para

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Ejemplo.- Encontrar una cota superior e inferior para

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1+x^6} |\sin(1 + \arctg(\exp(x^{2-\pi})))| dx$$

Solución.- $m = 0 \leq f(x) \leq \sqrt{1+x^6} \leq \sqrt{2} = M$, para $-1 \leq x \leq 1$.
Por lo tanto

$$0(1 - (-1)) \leq \int_{-1}^1 f(x) dx \leq \sqrt{2}(1 - (-1))$$

$$0 \leq \int_{-1}^1 f(x) dx \leq 2\sqrt{2}$$

Corolario.- Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua y no negativa, entonces

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0.$$

Demostración.- $(\forall x \in [a, b]) f(x) \geq 0$.

Por lo tanto

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b 0 dx = 0(b-a).$$

Teorema (del valor medio para integrales).- Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua, entonces existe $c \in [a, b]$ tal que

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a).$$

Demostración.- Sean m y M los valores de mínimo y máximo de f sobre $[a, b]$.
Por el teorema anterior

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

dado que $b-a > 0$

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x) dx}{(b-a)} \leq M \quad \dots\dots\dots (*)$$

Puesto que f es continua sobre $[a, b]$, f alcanza sus extremos m y M y se verifica (*), entonces por el teorema del valor intermedio $\exists c \in [a, b]$ tal que

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x) dx}{(b-a)}$$

es decir

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a)$$

Observación.-

1. El teorema del valor medio para integrales dice que si f no negativa entonces el área de la región limitada por el gráfico de f y el eje x , con $a \leq x \leq b$ es la misma que el área del rectángulo de altura $f(c)$ y base $b-a$.
2. $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ se llama valor promedio (o valor medio) de f sobre el intervalo $[a, b]$. Ejemplo si f representa la velocidad de un móvil la expresión anterior da la velocidad promedio sobre $[a, b]$. En forma similar la expresión anterior puede representar el costo promedio, ingreso promedio, etc.

1.4 Teorema Fundamental del Cálculo

Teorema.- Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua y sea $a \leq c \leq b$. Sea G la función definida por

$$G(x) = \int_c^x f(t) dt \text{ para } a \leq c \leq b.$$

Entonces G es derivable sobre $[a, b]$ y

$$(\forall x \in [a, b]) G'(x) = f(x)$$

Demostración.- Sea $x \in]a, b[$ fijo, y sea $a \leq z \leq b$, $z \neq x$ arbitrario. Entonces

$$\frac{G(z) - G(x)}{z - x} = \frac{\int_c^z f(t) dt - \int_c^x f(t) dt}{z - x} = \frac{\int_x^z f(t) dt}{z - x}$$

Por el Teorema del Valor Medio para integrales, $\exists c = c(z)$ entre x y z tal que

$$\frac{\int_x^z f(t) dt}{z - x} = f(c(z))$$

y $\lim_{z \rightarrow x} c(z) = x$

Note que para $z = x$, $[x, z] = \{x\}$.

Luego

$$\begin{aligned} G'(x) &= \lim_{z \rightarrow x} \frac{G(z) - G(x)}{z - x} = \lim_{z \rightarrow x} f(c(z)) \\ &= f\left(\lim_{z \rightarrow x} c(z)\right), f \text{ es continua} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Esto muestra que G es derivable sobre $[a, b]$ y $(\forall x \in [a, b]) G'(x) = f(x)$.

Observación.- Los mismos argumentos siguen siendo validos si se reemplaza el intervalo $[a, b]$ por otro intervalo (acotado o no acotado). Por lo tanto es válido el siguiente resultado más general.

Corolario.- Sea f una función continua sobre el intervalo I (que contiene más de un punto). Sea $c \in I$ fijo. Se define G sobre I por

$$G(x) = \int_c^x f(t) dt, x \in I.$$

Entonces G es derivable sobre I , y además

$$(\forall x \in I) G'(x) = f(x).$$

Ejemplos.-

1. Sea $G(x) = \int_2^x t \ln t dt, x > 0$. Obtenga $G'(1)$ y $G'(e)$ si existen.
2. Sea $F(x) = \int_0^{x^3} \exp(u) \sin(u^2) du, x \in \mathbb{R}$. Obtenga $F'(x)$ si existe.
3. Encontrar los extremos relativos de la función definida por

$$F(x) = \int_0^{x^2} (t-1)^2 \exp(t^2) dt, x \in \mathbb{R}.$$

Nota.- Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Recordemos que una antiderivada o primitiva de f es una función $g : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $(\forall x \in A) g'(x) = f(x)$. Por ejemplo una antiderivada de la función definida por $f(x) = x^3 + 2x + \cos x + 3$ es $g(x) = \frac{1}{4}x^4 + x^2 + 3x + \sin x + c$, con $c = \text{constante}$.

Teorema (Fundamental del cálculo).-

Sea f una función continua sobre $[a, b]$. Entonces

- a) f tiene una antiderivada sobre $[a, b]$.
- b) Si F es cualquier antiderivada de f sobre $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$$

Demostración.-

- a) Sea $G(x) = \int_a^x f(t) dt, a \leq x \leq b$. Por el corolario anterior, G es derivable sobre $I = [a, b]$ y

$$(\forall x \in I) G'(x) = f(x).$$

Luego G es una antiderivada de f sobre $[a, b]$.

- b) Sea F otra antiderivada de f sobre $[a, b]$, entonces $F(x) = G(x) + c$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \int_a^x f(t) dt &= G(b) - G(a) \\ &= (F(b) - c) - (F(a) - c) \\ &= F(b) - F(a) \end{aligned}$$

Notación.- $F(x) \big|_a^b = F(b) - F(a)$.

Ejemplos.-

1. $\int_0^1 (x^3 - 2x - 2) dx = \frac{1}{4}x^4 - x^2 - 2x \big|_0^1 = -\frac{11}{4}$
2. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan x \sec x dx = \sec x \big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = 0$

Diferenciación e Integración como Procesos Inversos

Sea f una función continua sobre el intervalo I y sea

$$G(x) = \int_a^x f(t) dt, x \in I$$

entonces G es derivable sobre I y además

$$(\forall x \in I) G'(x) = f(x)$$

es decir,

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = F(x) \big|_a^x$$

Sea F una función con 1^a derivada continua. Derivando primero e integrando después, obtenemos

$$\int_a^x F'(t) dt = F(x) \big|_a^x$$

es decir

$$\int_a^x F'(t) dt = F(x) - F(a)$$

Ejemplos.-

1. $\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{4}}} 2x \sin(x^2) dx = \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{4}}} [-\cos(x^2)]' dx = -\cos(x^2) \Big|_0^{\sqrt{\frac{\pi}{4}}} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$
2. Si v representa la velocidad de una partícula y $f(t)$ la posición, entonces

$$v(t) = \frac{d}{dx} f(t) = f'(t)$$

Integrando:

$$\int_{t_0}^t v(s) ds = \int_{t_0}^t f'(s) ds = f(s) \Big|_{t_0}^t$$

es decir

$$f(t) - f(t_0) = \int_{t_0}^t v(s) ds$$

De la misma manera si a representa la aceleración de la partícula se obtiene:

$$v(t) - v(t_0) = \int_{t_0}^t a(s) ds$$

3. Se deja caer un objeto desde una altura de 96pie con una velocidad inicial 0. Si el objeto cae con una aceleración constante debida a la gravedad de $-32\frac{\text{pie}}{\text{seg}^2}$, determinar la altura del objeto en cualquier instante después que se lanza hasta que toca la tierra.

Solución.-

$$t_0 = 0; \quad a(t) = -32; \quad f(t_0) = 96; \quad v(t_0) = 0$$

$$\begin{aligned} v(t) - v(0) &= -32t \\ f(t) - f(t_0) &= -16t^2 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$f(t) = 96 - 16t^2$$

1.5 Integrales indefinidas y reglas de integración

Definición.- Sea f una función continua sobre el intervalo I . Se llama integral indefinida de f sobre I a cualquier antiderivada de f sobre I . Se denota por

$$\int f(x) dx$$

Ejemplo.- $\int (2x + \cos x) dx = x^2 + \sin x + c$, con $c \equiv \text{constante}$

Teorema.- Sean f y g dos funciones continuas sobre un intervalo I . Entonces

$$\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

Demostración.- Sean F y G antiderivadas de f y g respectivamente, entonces

$$\int f(x) dx = F(x) \quad \text{y} \quad \int g(x) dx = G(x)$$

y

$$(F(x) + G(x))' = f(x) + g(x)$$

Luego $F + G$ es una integral indefinida de $f + g$, es decir

$$\int (f(x) + g(x)) dx = F(x) + G(x)$$

Por lo tanto

$$\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

Teorema.- Sea f una función continua sobre el intervalo I , y sea $c \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\int c f(x) dx = c \int f(x) dx$$

Demostración.- Análoga a la anterior. Ejercicio

Observación.- Estos teoremas siguen siendo válidos para integrales definidas.

Corolario.- Sean f y g funciones continuas sobre un intervalo I . Entonces

$$\int (f(x) - g(x)) dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx$$

Demostración.-

$$\begin{aligned} \int (f(x) - g(x)) dx &= \int (f(x) dx + (-g(x))) dx = \\ &= \int f(x) dx + \int (-g(x)) dx = \\ &= \int f(x) dx + \int (-1) g(x) dx = \\ &= \int f(x) dx + (-1) \int g(x) dx = \\ &= \int f(x) dx - \int g(x) dx \end{aligned}$$

Observación.- De igual manera si f y g son funciones continuas sobre el intervalo $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b (f(x) - g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$$

Proposición.- Sea f una función continua sobre el intervalo $[a, b]$, entonces

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

Demostración.-

$$(\forall x \in [a, b]) - |f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$$

Por lo tanto,

$$-\int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

Luego,

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

Ejemplo.- Demuestre que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \int_0^\epsilon x \sin x dx = 0$$

Solución.- Sea $\epsilon > 0$, se tiene:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{\epsilon} \int_0^\epsilon x \sin x dx \right| &= \frac{1}{|\epsilon|} \left| \int_0^\epsilon x \sin x dx \right| \leq \frac{1}{|\epsilon|} \int_0^\epsilon |x \sin x| dx \leq \frac{1}{|\epsilon|} \int_0^\epsilon |x| |x| dx \\ &= \frac{1}{|\epsilon|} \int_0^\epsilon x^2 dx \\ &= \frac{1}{3} \epsilon |\epsilon| \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left| \frac{1}{\epsilon} \int_0^\epsilon x \sin x dx \right| = 0$$

y luego

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \int_0^\epsilon x \sin x dx = 0.$$

1.6 Integración por sustitución

Teorema.- Sean f y g dos funciones tales que $g \circ f$ y f' sean continuas sobre un intervalo I . Sea G una integral indefinida de g sobre I , entonces

$$\int g(f(x)) f'(x) dx = G(f(x)) + c$$

Demostración.-

$$\frac{d}{dx} [G(f(x))] = G'(f(x)) f'(x) = g(f(x)) f'(x)$$

Por lo tanto

$$\int g(f(x)) f'(x) dx = G(f(x)) + c$$

Observación.-

1. En la práctica es conveniente reemplazar $u = f(x)$, lo que da,
 $du = f'(x) dx$ y con esto

$$\int g(f(x)) f'(x) dx = \int g(u) du$$

2. Para calcular una integral definida puede ser considerada primero como una integral indefinida y luego ser evaluada en sus límites de integración. Por esto todos los resultados para integrales indefinidas pueden ser aplicados en el calculo de integrales definidas.

Ejemplos.-

1. $\int x \sqrt{x^2 - 1} dx = \frac{1}{2} \int \sqrt{u} du; \quad u = x^2 - 1, du = 2x dx$
 $= \frac{1}{3} \sqrt{u^3} + c = \frac{1}{3} \sqrt{(x^2 - 1)^3} + c$
2. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^6 x \tan x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^5 x \sin x dx = - \int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} u^5 du; \quad u = \cos x,$
 $du = -\sin x dx$
 $= -\frac{1}{6} u^6 \Big|_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{7}{48}$
3. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin z}{\cos^2 z} dz = - \int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} u^{-2} du, \quad u = \cos z, du = -\sin z dz$
 $= u^{-1} \Big|_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2} - 1$

Ejercicios.-

1. Demuestre que $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$, si f es impar
2. Calcule el área A entre el gráfico de la función definida por

$$f(x) = \sqrt{x+1}, x \in [0, 3]$$

y el eje x .

1.7 El logaritmo como una integral

Sea $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in I$, I es un intervalo que no contiene a 0. Luego $\int f(x) dx$ sobre I ya que f es continua sobre ese intervalo. Esto motiva la siguiente :

Definición.- La función "logaritmo natural" queda definida por:

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt$$

sobre el intervalo $]0, +\infty]$.

Observación.- De la definición se obtiene:

1. $\ln 1 = 0$
2. $\frac{d}{dx} (\ln x) = \frac{1}{x}$ (T. F. del C.)
3. La función logaritmo natural es estrictamente creciente sobre el intervalo $]0, +\infty]$ ($\frac{d}{dx} (\ln x) > 0$)
4. Puesto que la función logaritmo natural es continua sobre $[1, 4]$, entonces del teorema del valor intermedio ($\ln 1 = 0$, $\ln 4 = \int_1^4 \frac{1}{t} dt = \int_1^2 \frac{1}{t} dt + \int_2^4 \frac{1}{t} dt + \int_3^4 \frac{1}{t} dt \geq \frac{1}{2}(2-1) + \frac{1}{3}(3-2) + \frac{1}{4}(4-3) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 1$) se obtiene que existe un número e (único porque $f(x) = \ln x$ es creciente) tal que $\ln e = 1$.
5. Se puede demostrar que e es un número irracional y que

$$e \approx 2,7182818284590452336$$

6. también podemos enunciar las siguientes propiedades:

Teorema.- Sean $b > 0$, $c > 0$, r racional. Se tiene:

- (a) $\ln(bc) = \ln b + \ln c$
- (b) $\ln(b^r) = r \ln b$
- (c) $\ln \frac{b}{c} = \ln b - \ln c$, en particular $\ln \frac{1}{c} = -\ln c$

Demostración.- Ejercicio

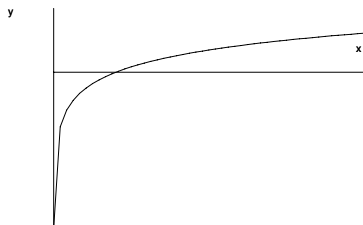
7. Para analizar la gráfica de $f(x) = \ln x$, tenemos que:

$$\ln 1 = 0$$

f es creciente sobre $]0, +\infty[$

$$\frac{d^2}{dx^2} (\ln x) = -\frac{1}{x^2} < 0. \text{ La gráfica es cóncava hacia abajo.}$$

$$f(x) = \ln x$$



Observación.-

1. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x) = -\infty$
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x) = +\infty$

3. $\frac{d}{dx}(\ln(-x)) = -\frac{1}{x}(-1) = \frac{1}{x}$, $x < 0$. Dado que además $\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$, tenemos que

$$\frac{d}{dx}(\ln|x|) = \frac{1}{x}, \quad x \in]-\infty, 0[\text{ o bien } x \in]0, +\infty[$$

Por lo tanto

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$$

Ejemplos.-

1. $\int_{-4}^{-12} \frac{2}{t} dt = 2 \int_{-4}^{-12} \frac{1}{t} dt = 2 \ln|t| \Big|_{-4}^{-12} = 2 \ln 3.$

2. Encontrar el dominio y la derivada de la función definida por:

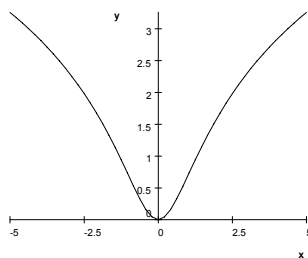
$$g(x) = x \ln(x^2 - 1).$$

Solución.- $\text{dom} f =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[.$

3. Obtenga $\frac{dy}{dx}$ si: $y \ln \frac{y}{x} = \sin(y^2 + x).$

4. Obtenga el gráfico de $f(x) = \ln(1 + x^2).$

Solución.- $\text{dom} f = \mathbb{R}$



$$f(x) = \ln(1 + x^2)$$

5. $\int \cot x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{du}{u} \quad u = \sin x; du = \cos x dx$
 $= \ln|u| + c = \ln|\sin x| + c.$

6. $\int \sec x dx = \int \sec x \frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x} dx = \int \frac{du}{u} \quad u = \sec x + \tan x$
 $du = (\sec x \tan x + \sec^2 x) dx$
 $\int \sec x dx = \ln|u| + c = \ln|\sec x + \tan x| + c.$

Ejercicios.-

- Demuestre que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$
- Averigue sobre el "método de derivación logarítmica" (para encontrar la derivada de un producto) y demuéstrelo.