

1 Funciones Inversas

1.1 Repaso de propiedades de funciones inversas

Sea $f : A \rightarrow B$ una función biyectiva y sea $f^{-1} : B \rightarrow A$ su función inversa. Recordemos que se tienen las siguientes propiedades:

1. $(\forall x \in A) y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)$
2. $f \circ f^{-1} = I_B$ y $f^{-1} \circ f = I_A$
3. $(\forall y \in B) f(f^{-1}(y)) = y \quad \wedge \quad (\forall x \in A) f^{-1}(f(x)) = x$
4. Toda función estrictamente creciente y toda función estrictamente decreciente es inyectiva.
5. La gráfica de una función biyectiva y de su inversa son simétricas con respecto a la recta de ecuación $y = x$

1.2 Continuidad y derivabilidad de funciones inversas

Teorema.- Sea $f : I \rightarrow J$ una función biyectiva, I y J son intervalos de $\mathbb{R}$. Si f es continua, entonces $f^{-1} : J \rightarrow I$ también lo es.

Teorema.- Supongamos que f tiene una inversa y es continua sobre un intervalo I . Sea $x_0 \in I$ e $y_0 = f(x_0)$. Si $f'(x_0)$ existe y si $f'(x_0) \neq 0$, entonces $(f^{-1})'(y_0)$ existe y además

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Idea de la demostración.- f^{-1} es continua sobre J (ya que f lo es sobre I). En particular f es continua en $y_0 = f(x_0)$.

$$\begin{aligned} (f^{-1})'(y_0) &= \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{-1}(f(x)) - f^{-1}(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}; (f \text{ y } f^{-1} \text{ son continuas}). \end{aligned}$$

Ejemplos.-

1. Sea $f(x) = x^5 - 3x^2 + 3x - 4$. Encontrar $(f^{-1})'(-3)$ si existe.

Solución.- $f(1) = -3$

. f es continua sobre $\mathbb{R}$

. $1 \in]-\infty, +\infty[$

. f es derivable y $(\forall x \in \mathbb{R}) f'(x) = 5x^4 - 6x^2 + 3$

En particular $f'(1) = 2$.

. Luego f es derivable en $y_0 = f(1) = -3$ y

. $(f^{-1})'(-3) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{2}$

2. Sea $y = 3x^4 + 2x - \ln x^2$. Encontrar $\frac{dx}{dy}$.

Solución.- Sea $y = f(x)$, entonces $\frac{dy}{dx} = f'(x)$.

Supongamos que f^{-1} existe sobre un intervalo abierto I . Entonces podemos escribir:

. $x = f^{-1}(y)$,

y luego

. $\frac{dx}{dy} = (f^{-1})'(y)$

- f es continua sobre I
- f es derivable

Por lo tanto

- $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$

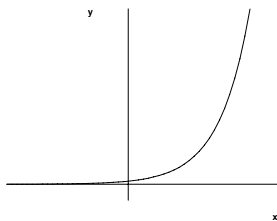
es decir

- $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{12x^3 + 2 - \frac{2x}{x^2}} = \frac{x}{12x^4 + 2x - 2}, 12x^4 + 2x - 2 \neq 0.$

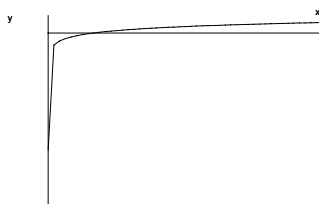
1.3 La función exponencial natural

La función inversa de $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \ln x$ es $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+, f^{-1}(x) = e^x$.
Se tiene:

1. $(\forall x > 0) e^{\ln x} = x$ y $(\forall x \in \mathbb{R}) \ln e^x = x$
2. $\frac{d}{dx} e^x = \frac{1}{\frac{d}{dy} (\ln y)} = \frac{1}{\frac{1}{y}} = y = e^x$ (donde $y = e^x$)
3. $y = e^x$



$$y = \ln x$$



4. $\int e^x dx = e^x + c$

Ejemplos.- Encontrar $f'(x)$ si

1. $f(x) = e^{\cos x}$
2. $f(x) = \tan e^{3x^4}$
3. $x^2 e^y = \ln xy$, donde $y = f(x)$.
· Encontrar la integral:

4. $\int \frac{e^{\tan y}}{\cos^2 y} dy$

5. $\int e^{(e^x + x)} dx$

6. $\int \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}} dt$

1.4 La función exponencial y logaritmo

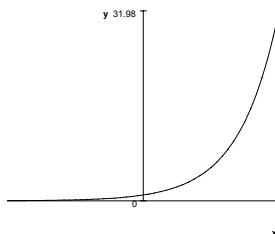
1. $(\forall a \in \mathbb{R}) \frac{d}{dx} (x^a) = ax^{a-1}.$

Demostración.- $x^a = e^{a \ln x}$

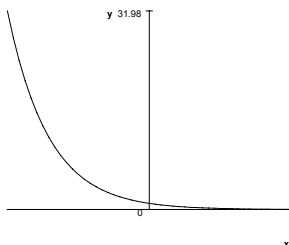
Ejemplo.- Sea $f(x) = (3x)^{\cos x}$. Encontrar $f'(x)$.

Solución.- $f(x) = e^{\sin x \ln 3x}$. (Alternativa: $\ln y = \cos(\ln 3x)$)

2. $y = a^x$ (con $a > 1$)



$y = a^x$ (con $0 < a < 1$)



3. $\frac{d}{dx} (a^x) = a^x \ln a$

4. $\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + c$

5. Teorema.- Sea $a > 0, a \neq 1$. Entonces $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}, x > 0$.

Demostración.- $y = \log_a x \iff a^y = x \iff y \ln a = \ln x \iff y = \frac{\ln x}{\ln a}$.

6. Son válidas las leyes de logaritmos (ya concidas).
 $(\forall a, b, c > 0) \log_a bc = \log_a b + \log_a c \quad \wedge \quad \log_a b^r = r \log_a b$

1.5 Crecimiento y decrecimiento exponencial

Señalamos el siguiente:

Teorema.- Sea $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continua y tal que $(\forall x > 0) f'(x) = kf(x)$.

Entonces:

$$(\forall x > 0) f(x) = f(0) e^{kx}$$

Observación.-

1. Si f satisface la relación anterior decimos que crece exponencialmente cuando $k > 0$ o que decrece exponencialmente cuando $k < 0$.
2. Si $(\forall x \in \mathbb{R}) f'(x) = kf(x)$, entonces el resultado anterior también se extiende a

$$(\forall x \in \mathbb{R}) f(x) = f(0) e^{kx}$$

1.6 Funciones trigonométricas inversas

Las derivadas de las funciones trigonométricas inversas se obtienen usando directamente el teorema correspondiente de la sección 5.2.

- $f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1], f(x) = \sin x$
 $f^{-1} : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], f^{-1}(x) = \arcsin x$
 Se tiene:
 $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x \quad \wedge \quad \frac{d}{dx}(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, |x| < 1.$
Observación.-
 - $\arcsin(\sin x) = x$
 - $\sin(\arcsin x) = x$
 - $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$
 - $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + c, a$ es un número fijo mayor que 0.
- $f : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1], f(x) = \cos x$
 $f^{-1} : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi], f^{-1}(x) = \arccos x$
 Se tiene:
 $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x \quad \wedge \quad \frac{d}{dx}(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, |x| < 1.$
- $f : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\rightarrow]-\infty, +\infty[, f(x) = \tan x$
 $f^{-1} :]-\infty, +\infty[\rightarrow \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, f^{-1}(x) = \arctan x$
 Se tiene:
 $\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x \quad \wedge \quad \frac{d}{dx}(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}$
- $f :]0, \pi[\rightarrow]-\infty, +\infty[, f(x) = \cot x$
 $f^{-1} :]-\infty, +\infty[\rightarrow]0, \pi[, f^{-1}(x) = \operatorname{arccot} x$
 Se tiene:
 $\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x \quad \wedge \quad \frac{d}{dx}(\operatorname{arccot} x) = -\frac{1}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}$
- $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right] \rightarrow]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[, f(x) = \sec x$
 $f^{-1} :]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[\rightarrow \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right], f^{-1}(x) = \operatorname{arcsec} x$
 Se tiene:
 $\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x \quad \wedge \quad \frac{d}{dx}(\operatorname{arcsec} x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}, |x| > 1$
- $f : \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right[\cup \left]0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[, f(x) = \csc x$
 $f^{-1} :]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[\rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right[\cup \left]0, \frac{\pi}{2}\right], f^{-1}(x) = \operatorname{arccsc} x$
 Se tiene:
 $\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x \quad \wedge \quad \frac{d}{dx}(\operatorname{arccsc} x) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}, |x| > 1$
Demostración.-

- Indicación.-
 $\frac{d}{dx}(\arcsin x) = \frac{1}{\frac{d}{dy}(\sin y)} = \frac{1}{\cos y} =^* \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
 $* x \in]-1, 1[\iff y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\iff \cos y > 0.$

El resto se demuestra de la misma manera. Queda como ejercicio.

Ejemplos.-

- $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x} e^{\tan^2 x} dx = \int \tan x \sec^2 x e^{\tan^2 x} dx \stackrel{u=\tan^2 x}{=} \int \frac{1}{2} e^u du = \frac{1}{2} e^u + c = \frac{1}{2} e^{\tan^2 x} + c$
- $\int \frac{x-1}{18x^2-12x+4} dx = \int \frac{\frac{1}{36}(36x-12) - \frac{2}{3}}{18x^2-12x+4} dx =$
 $= \frac{1}{3} \int \frac{36x-12}{18x^2-12x+4} dx - \frac{2}{3} \int \frac{1}{18x^2-12x+4} dx \stackrel{u=18x^2-12x+4}{=} \frac{1}{3} \ln|u| - \frac{1}{9} \int \frac{1}{u} du$
 $= \frac{1}{36} \ln|u| - \frac{1}{9} \int \frac{1}{1+v^2} dv = \frac{1}{36} \ln|18x^2-12x+4| - \frac{1}{9} \arctan v + c =$
 $\frac{1}{36} \ln|18x^2-12x+4| - \frac{1}{9} \arctan(3x-1) + c$
- Para $-1 < a \leq x \leq b < 1$:
 $\int \frac{x^3-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx - \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \stackrel{u=1-x^2}{=} \int \frac{-\frac{1}{2} du}{\sqrt{u}} - \arcsin x = -\frac{1}{2} \sqrt{u} - \arcsin x = -\frac{1}{2} \sqrt{1-x^2} - \arcsin x + c$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{1}{2} \int \frac{1-u}{\sqrt{u}} du - \arcsin x + c = -\frac{1}{2} \left(2u^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \right) - \arcsin x + c = \\
 &= -\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{3} \sqrt{(1-x^2)^3} + c
 \end{aligned}$$

4. Suponga que la rapidez con que se enfría la superficie de un material, en un medio ambiente a 0° C, es proporcional a su temperatura. Sabiendo que el material, se encuentra a 90°, explique ¿como puede predecir al cabo de 1 minuto cuanto demorará en estar a una temperatura de 20°?.

Solución.- $\frac{dT}{dt} = -kT, k > 0$

$$\begin{aligned}
 T(t) &= T(0) e^{-kt} \\
 T(t) &= 90e^{-kt} \\
 T(t_1) &= 20 = 90e^{-kt}
 \end{aligned}$$

Al cabo de un minuto la temperatura estará a 20° en $t = t_1 - 1$.

1.7 Funciones hiperbólicas

Definición.- Se definen las funciones llamadas "seno hiperbólico" y "coseno hiperbólico" respectivamente de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 \sinh &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\
 \cosh &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}
 \end{aligned}$$

Estas funciones tienen las siguientes propiedades:

- $\sinh(0) = 0 \quad \wedge \quad \cosh(0) = 1$
- $(\forall x \in \mathbb{R}) \frac{d}{dx} \sinh(x) = \cosh(x) \quad \wedge \quad \frac{d}{dx} \cosh(x) = \sinh(x)$

Demostración.-

$$\frac{d}{dx} \cosh(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh(x)$$

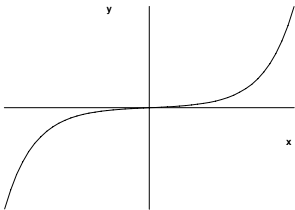
3. $f(x) = \sinh x$

x		0	
$f(x)$		0	
$f'(x)$	+++	+	+++
$f''(x)$	---	0	+++
	$\nearrow \cap$		$\nearrow \cup$

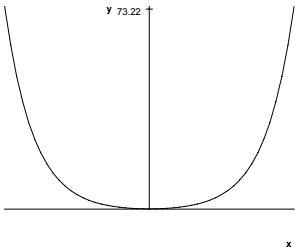
 $y = f(x)$

$g(x) = \cosh x$

x		0	
$g(x)$		1	
$g'(x)$	---	0	+++
$g''(x)$	+++	0	+++
	$\searrow \cup$		$\nearrow \cup$



$$y = g(x)$$



4. $(\forall x \in \mathbb{R}) \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

Demostración.-

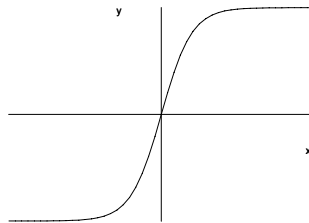
$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2 = 1$$

5. La función sinh es impar y la función cosh e par

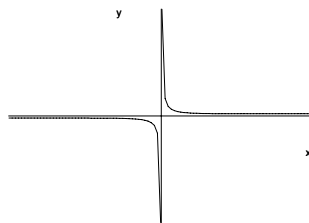
6. $(\forall t \in \mathbb{R}) (\cosh t, \sinh t)$ pertenece a la hipérbola: $x^2 - y^2 = 1$.
7. Se definen las funciones "tangente hiperbólica", "cotangente hiperbólica", "secante hiperbólica", "cosecante hiperbólicas" respectivamente por:

$$\begin{aligned}\tanh &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \\ \coth &: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, \coth(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} \\ \operatorname{sech} &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \operatorname{sech}(x) = \frac{1}{\cosh(x)} \\ \operatorname{csch} &: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, \operatorname{csch}(x) = \frac{1}{\sinh(x)}\end{aligned}$$

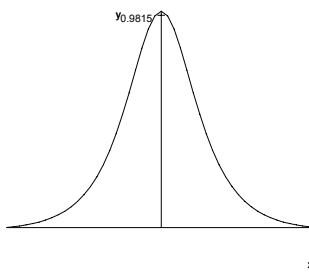
$$f(x) = \tanh(x)$$



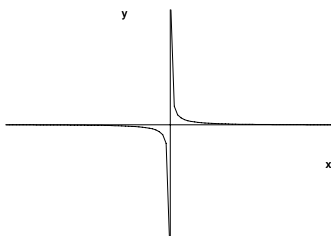
$$f(x) = \coth(x)$$



$$f(x) = \operatorname{sech}(x)$$



$$f(x) = \operatorname{csch}(x)$$



Las funciones hiperbólicas verifican las siguientes propiedades:

- (a) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$
- (b) $\tanh^2 x + \operatorname{sech}^2 x = 1$
- (c) $\coth^2 x - \operatorname{csch}^2 x = 1$
- (d) $\sinh(-x) = -\sinh(x)$

- (e) $\cosh(-x) = \cosh(x)$
(f) $\sinh(x \pm y) = \sinh(x) \cosh(y) \pm \cosh(x) \sinh(y)$
(g) $\cosh(x \pm y) = \cosh(x) \cosh(y) \pm \sinh(x) \sinh(y)$
(h) $\tanh(x \pm y) = \frac{\tanh(x) \pm \tanh(y)}{1 \pm \tanh(x) \tanh(y)}$

Demostración.-

- (d) $\sinh(-x) = \frac{e^{-x} - e^x}{2} = -\sinh(x)$
(f) $\sinh(x+y) = \frac{e^{x+y} - e^{-(x+y)}}{2}$

$$\sinh(x) \cosh(y) + \cosh(x) \sinh(y) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \frac{e^y + e^{-y}}{2} + \frac{e^x + e^{-x}}{2} \frac{e^y - e^{-y}}{2} =$$

$$= \frac{e^{x+y} - e^{-(x+y)}}{2}$$

Por lo tanto

$$\sinh(x+y) = \sinh(x) \cosh(y) + \cosh(x) \sinh(y).$$

Además:

$$\begin{aligned} \sinh(x-y) &= \sinh(x+(-y)) = \\ &= \sinh(x) \cosh(-y) + \cosh(x) \sinh(-y) \stackrel{(d)}{=} \sinh(x) \cosh(y) - \cosh(x) \sinh(y) \end{aligned}$$

Observación.- Las funciones hiperbólicas no son periódicas.

La función seno hiperbólico inverso

Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sinh x$ y sea $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$, entonces $g \circ f = f \circ g = I_{\mathbb{R}}$, y por lo tanto $g = f^{-1}$, es decir, la función inversa de la función "sinh" es aquella definida por $g(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), x \in \mathbb{R}$.

Nota.- Para la función inversa de "sinh" se adopta también la notación " $\sinh^{-1}$ " siempre que este claro el contexto en que se usa y no hay lugar a confusión con el recíproco de $\sinh x$ que es $\frac{1}{\sinh x}$.

Por otra parte, la función "sinh" es continua, derivable y además

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \frac{d}{dx} (\sinh x) \neq 0$$

Luego de $y = \sinh^{-1} x$, se tiene $x = \sinh y$ y por el teorema para la derivada de la inversa

$$\frac{d}{dx} (\sinh^{-1} x) = \frac{1}{\frac{d}{dy} (\sinh y)} = \frac{1}{\cosh y} = \frac{1}{\sqrt{\sinh^2 y + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

Por lo tanto

$$\frac{d}{dx} (\sinh^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

Ejemplos.-

- $\frac{d}{dx} (\tanh x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{\sinh x}{\cosh x} \right) = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x} = \operatorname{sech}^2 x.$
- $\frac{d}{dx} (\sinh^{-1} (\sqrt{x+1} - x^2)) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x+1}} - 2x}{\sqrt{(\sqrt{x+1} - x^2)^2 + 1}} = \frac{1 - 4x\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x+1}\sqrt{(\sqrt{x+1} - x^2)^2 + 1}}$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4x + 13}} = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{x-2}{3}\right)^2 + 1}} \stackrel{u=\frac{x-2}{3}}{=} \int \frac{du}{\sqrt{u^2 + 1}} = \sinh^{-1} u + c = \sinh^{-1} \left(\frac{x-2}{3} \right) + c.$