

1 Aplicaciones de la derivada

1.1 Máximos y mínimos

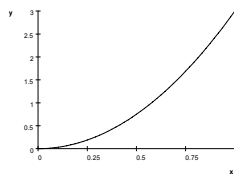
Definición.- Sean $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función, $x_0 \in A$. Damos que:

1. f alcanza un máximo absoluto en x_0 si $(\forall x \in A) f(x) \leq f(x_0)$.
2. f alcanza un mínimo absoluto en x_0 si $(\forall x \in A) f(x_0) \leq f(x)$.

$f(x_0)$ es llamado el valor de máximo o de mínimo (según corresponda) de f sobre A .

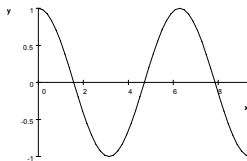
Ejemplos.-

1. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 3x^2 & , \quad x \neq 1 \\ 1 & , \quad x = 1 \end{cases}$



Alcanza un mínimo absoluto en $x_0 = 0$, su valor mínimo es $f(0) = 0$ y no alcanza un máximo absoluto.

2. $f : [0, 3\pi[\rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \cos x$



Alcanza un máximo absoluto en los puntos $x_0 = 0$. Su valor máximo es $f(0) = f(2\pi) = 1$. Alcanza un mínimo valor en el punto $x_2 = \pi$ y su valor mínimo es $f(\pi) = -1$.

3. $f :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}$, no alcanza ni un máximo ni un mínimo absoluto.

Observación.- si f tiene un máximo y un mínimo absoluto en A se dice que f tiene extremos en A .

Definición.- Sean $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función y $x_0 \in A$. Se dice que:

1. f alcanza un máximo local en x_0 si

$$(\exists \delta > 0) (\forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap A) f(x) \leq f(x_0).$$

2. f alcanza un mínimo local en x_0 si

$$(\exists \delta > 0) (\forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap A) f(x_0) \leq f(x).$$

Ejemplos.-

1. En el ejemplo 1. anterior f no posee puntos de máximo ni de mínimo local.

2. En el ejemplo 2. anterior f tiene un máximo local en $x_0 = 2\pi$ y tiene un mínimo local en $x_2 = 2\pi$.
3. En el ejemplo 3. anterior f no tiene máximo ni mínimo local.

$$4. f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}x^2 - \pi & , \quad x \leq \pi \\ -\sin x & , \quad \pi < x \leq \frac{7\pi}{2} \\ -x + \frac{7\pi}{2} + 1 & , \quad x > \frac{7\pi}{2} \end{cases}$$

Alcanza un máximo local en los puntos $x_0 = \frac{3\pi}{2}$ y $x_1 = \frac{7\pi}{2}$. Alcanza un mínimo local en los puntos $x_2 = 0$ y $x_3 = \frac{5\pi}{2}$. f no alcanza máximo ni mínimo absoluto.

$$5. f : [0, 12] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} -x + 3 & , \quad x \leq 1 \\ x & , \quad 1 < x \leq 3 \\ -x + 7 & , \quad 3 < x < 8 \\ x - 10 & , \quad 8 \leq x < 10 \\ -x + 11 & , \quad x \geq 10 \end{cases}$$

Alcanza un máximo local en $x_0 = 10$. Alcanza un mínimo local en $x_1 = 8$. Alcanza un mínimo absoluto en $x_1 = 8$. No alcanza un máximo absoluto. Observación.- Los puntos $x_3 = 1$ y $x_4 = 3$ no son puntos de máximo ni de mínimo local o absoluto.

Teorema.- Si f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces f alcanza un máximo y un mínimo (absoluto) sobre $[a, b]$.

Observación.- El teorema dice que una función continua alcanza sus extremos sobre un intervalo cerrado.

Teorema.- Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ y sea $x_0 \in]a, b[$. Si f es derivable en x_0 y alcanza un extremo en x_0 (local o absoluto), entonces $f'(x_0) = 0$.

Demostración.-

- i) Supongamos que $f'(x_0) > 0$.

Dado que

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0,$$

entonces para x cercano a x_0

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0.$$

Luego para $x > x_0$, $f(x) > f(x_0)$ y para $x < x_0$, $f(x) > f(x_0)$.

Por lo tanto x_0 no es un punto extremo de f . $\longrightarrow \longleftarrow$

- ii) Análogo.

Observación.-

1. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ derivable, entonces el teorema anterior dice que f alcanza los extremos (absolutos) en los puntos a o b ; o bien en los puntos $x_0 \in]a, b[$ tales que $f'(x_0) = 0$.
2. El recíproco del teorema no es verdadero, es decir, pueden existir puntos $x_0 \in]a, b[$ tales que $f'(x_0) = 0$ y x_0 no es un punto extremo de f .

Ejemplo.- Para $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3$, se tiene que $f'(0) = 0$ y $x_0 = 0$ no es un punto extremo de f .

Definición.- Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Se llaman puntos críticos de f a todos los puntos $x_0 \in A$ tales que $f'(x_0) = 0$ o $f'(x_0)$ no existe.

Observación.- Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua, los puntos extremos de f se encuentran entre los puntos críticos de f o entre los extremos a o b de $[a, b]$.

Ejemplos.- Encontrar los extremos de:

1. $f(x) = x - x^3$ sobre $[0, 1]$.

Solución.-

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\iff x = \frac{1}{\sqrt{3}} \vee x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} &\text{ es el único punto crítico sobre } [0, 1] \\ f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) &= \frac{2}{9}\sqrt{3}; f(0) = f(1) = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto f alcanza un mínimo absoluto en $x_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ y un máximo absoluto en los puntos $x_1 = 0, x_2 = 1$.

2. $f(x) = |x|$ sobre $[-2, 1]$.

Solución.- ($\forall x \neq 0$) $f'(x) \neq 0$ y $f'(0)$ no existe.

$x_0 = 0$ es el único punto crítico para f .

$f(0) = 0, f(-2) = 2, f(1) = 1$.

Luego f alcanza un máximo absoluto en $x_1 = -2$ y un mínimo absoluto en $x_0 = 0$.

3. $f(x) = x - x^3$ sobre $[-1, 3]$.

Solución.- f alcanza un máximo absoluto en $x_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ y un mínimo absoluto en $x_1 = 3$.

Ejercicios.-

1. Encontrar los extremos de:

(a) $f(x) = x^2 - x$ sobre $[0, 2]$

(b) $f(x) = x^4 - 4x$ sobre $[-4, 4]$

(c) $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$ sobre $[-2, 3]$

(d) $f(x) = -\sin \sqrt[3]{x}$ sobre $\left[-\frac{\pi^3}{37}, \frac{\pi^3}{8}\right]$

(e) $f(x) = \cos \pi x$ sobre $\left[\frac{1}{3}, 1\right]$

2. Sean $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tales que $g(x) = -f(x)$. Pruebe que: $f(x_0)$ es el menor valor de f sobre $[a, b] \iff g(x_0)$ es el mayor valor de g sobre $[a, b]$.

1.1.1 Teorema del valor medio

Teorema de Rolle.-Sea f continua sobre $[a, b]$ y derivable sobre $]a, b[$. Si $f(a) = f(b)$, existe $x_0 \in]a, b[$ tal que $f'(x_0) = 0$.

Demostración.-

- i) Si f es constante, $(\forall x \in]a, b[) f'(x) = 0$.
- ii) Si f no es constante existen números x_1 y x_2 (distintos) de máximo y de mínimo respectivamente.
Como $f(a) = f(b)$, entonces $x_1 \notin \{a, b\}$ o $x_2 \notin \{a, b\}$.
Si $x_1 \notin \{a, b\}$, entonces $x_1 \in]a, b[$, x_1 es un punto extremo de f y f es derivable en x_1 . Luego $f'(x_1) = 0$.
Si $x_2 \notin \{a, b\}$, entonces de manera análoga se obtiene que $f'(x_0) = 0$.

Observación.- En las condiciones de hipótesis del teorema, este dice que:

1. Existe al menos un punto $x_0 \in]a, b[$ tal que la recta tangente a la gráfica de f en $(x_0, f(x_0))$ es paralela al eje de las x .
2. Existe al menos un punto crítico de f sobre $]a, b[$.

Teorema del valor medio.- Sea f continua sobre $[a, b]$ y derivable sobre $]a, b[$. Existe $x_0 \in]a, b[$ tal que

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Demostración.- Sea $g(x) = f(x) - \left[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \right]$, entonces g es continua sobre $[a, b]$ y derivable sobre $]a, b[$. Además $g(a) = g(b) = 0$. Por el teorema de Rolle existe $x_0 \in]a, b[$ tal que $g'(x_0) = 0$. Dado que

$$g'(x_0) = f'(x_0) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, a < x_0 < b,$$

se tiene

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \text{ y } x_0 \in]a, b[.$$

Observación.- El teorema dice del valor medio dice que existe $x_0 \in]a, b[$ tal que la recta tangente a la gráfica de f en $(x_0, f(x_0))$ es paralela a la recta que une los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.

Ejemplo.- Verifique el teorema del valor medio para

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x \text{ sobre } [0, 3].$$

Solución.-

- f es continua sobre $[0, 3]$.
- f es derivable sobre $]0, 3[$ y $f'(x) = x^2 + 2$.
- $\frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = 5$.

La ecuación $f'(x) = 5$ tiene solución $x = \pm\sqrt{3}$. Luego $x_0 = \sqrt{3}$ satisface el teorema del valor medio.

Ejercicios.-

1. Verifique el T.V.M. para: $f(x) = x^3 - 6x$ sobre $[-2, 0]$.
2. Sea $f(x) = |x|$. Muestre que $f(-2) = f(2)$ pero que no existe un número $c \in]-2, 2[$ tal que $f'(c) = 0$. Este resultado ¿contradice el teorema de Rolle?

- Use el teorema de rolle para mostrar que existe una solución de la ecuación $\tan x = 1 - x$ sobre $]0, 1[$.
Indicación.- $f(x) = (x - 1) \sin x, x \in [0, 1]$.
- Para llegar a Aulas un estudiante de Ingeniería recorre sin detenerse 2 kms. en 20 min. Otro astuto mechón lo observa y dice: "estoy seguro que por lo menos en un instante de tú trayectoria tu rapidez ha sido 6 kms./hr". ¿Es correcta esta afirmación?. ¿Por que?.

1.1.2 Aplicaciones del teorema del valor medio

Teorema.-

- Sea f continua sobre el intervalo I de extremos a y b . Si $f'(x) = 0$ para cada $x \in]a, b[$, entonces f es constante sobre I .
- Sean f y g son continuas sobre el intervalo I de extremos a y b . Si $f'(x) = g'(x)$ para cada $x \in]a, b[$, entonces existe una constante c tal que $f(x) = g(x) + c$ sobre I .

Demostración.-

- Sean $x, z \in I$ con $x < z$. Se tiene:
 - $\cdot f$ es continua sobre $[x, z]$
 - $\cdot f$ es derivable sobre $]x, z[$.
 Por el T. V. M. existe $x_0 \in]x, z[$ tal que

$$f'(x_0) = \frac{f(z) - f(x)}{z - x} = 0.$$

Luego $f(z) = f(x)$, lo que prueba que f es constante sobre I .

- Basta aplicar la parte a) a la función definida por

$$h(x) = f(x) - g(x).$$

Observación.-

- Sea f una función definida sobre un intervalo I , se llama antiderivada de f , primitiva de f , o integral indefinida de f a cualquier función $F : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $F'(x) = f(x)$ sobre I .
- De acuerdo al teorema anterior parte b) la diferencia entre dos antiderivadas de f es constante sobre I .
- Una integral indefinida de f se denota por $\int f(x) dx$. De acuerdo a la definición $\int f(x) dx = F(x) + c$, donde c es llamada constante de integración.

Ejemplos

- (a) Encontrar todas las antiderivadas de

$$f(x) = x(2 \sin x + x \cos x) \text{ sobre } \mathbb{R}$$

- Determine la antiderivada G de f tal que $F(0) = 1$.

Solución.-

- $F(x) = x^2 \sin x + c, c = cte.$

$$(b) F(x) = x^2 \sin x + 1 - \frac{\pi^2}{4}$$

- $\int (3x^2 + \sec^2 x) dx = x^3 + \tan x + c$, sobre cualquier intervalo I que no contenga múltiplos de $\frac{\pi}{2}$.

$$(b) \int x(2 \cos x - x \sin x) dx = x^2 \cos x, \text{ sobre } I = \mathbb{R}.$$

Funciones crecientes y decrecientes

Definición.-

- a) Una función f se dice creciente [decreciente] sobre el intervalo I si:

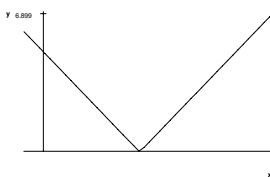
$$\begin{aligned} (\forall x, y \in I) \quad x &\leq y \implies f(x) \leq f(y) \\ &[(\forall x, y \in I) \quad x \leq y \implies f(y) \leq f(x)] \end{aligned}$$

- b) f se dice estrictamente creciente [estrictamente decreciente] sobre el intervalo I si:

$$\begin{aligned} (\forall x, y \in I) \quad x &< y \implies f(x) < f(y) \\ &[(\forall x, y \in I) \quad x < y \implies f(y) < f(x)] \end{aligned}$$

Ejemplos.-

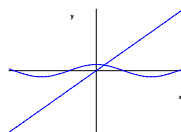
1.



$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |x - 5|$
 f es decreciente sobre $]-\infty, 5[$
 f es creciente sobre $]5, +\infty[$.

2. Muestre que existe exactamente un valor de x tal que $\cos x = 2x$

Solución.-



Sea $f(x) = \cos x - 2x, x \in \mathbb{R}$, se tiene: $(\forall x \in \mathbb{R}) f'(x) < 0$.

Teorema.- Sea f una función continua sobre un intervalo I de extremos a y b y derivable sobre $]a, b[$.

- a) Si $f'(x) \geq 0$ sobre $]a, b[$, entonces f es creciente sobre I . Si además $f'(x) = 0$ sólo en un número finito de puntos de I , entonces f es estrictamente creciente sobre I .
- b) Si $f'(x) \leq 0$ sobre $]a, b[$, entonces f es decreciente sobre I . Si además $f'(x) = 0$ sólo en un número finito de puntos de I , entonces f es estrictamente decreciente sobre I .

Demostración.-

- a) i) Sean $x, z \in I; x < z$, entonces

- f es continua sobre $[x, z]$
- f es derivable sobre $]x, z[$.

Por el T.V.M. existe $c \in]x, z[$ tal que $f'(c) = \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \geq 0$.

Puesto que $z - x > 0$, $f(x) < f(z)$. Luego f es creciente sobre I .

- ii) Supongamos que f no es estrictamente creciente sobre I .

Existen $u, v \in I; u < v$ y $f(u) = f(v)$. Dado que f es creciente, f es constante sobre $[u, v]$. Por lo tanto $(\forall x \in]u, v[) f'(x) = 0$.

- b) Basta aplicar la parte a) a la función

$$g : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = -f(x).$$

Ejemplos.-

1. Sea $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 3$. Encontrar los intervalos donde f es estrictamente creciente (decreciente).

Solución.- $f'(x) = 6(x+2)(x-1)$

2. Sea $f(x) = x^3 + 3x^2 + 32x - 3$. Encontrar los intervalos donde f es creciente o decreciente.

Solución.- $f'(x) = 3(x+1)^2$.

Observación.- El teorema anterior es válido solo en un intervalo, sin esta hipótesis este puede fallar, por ejemplo si $f(x) = \frac{1}{x}$, entonces $(\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}) f'(x) < 0$ y f no es decreciente sobre $\mathbb{R} - \{0\}$.

1.2 Criterio de la 1ª y 2ª derivada

Diremos que f' cambia de positivo a negativo en x_0 si existe $\delta > 0$ tal que

$$[\forall x \in]x_0 - \delta, x_0[\quad f'(x) > 0$$

y

$$[\forall x \in]x_0, x_0 + \delta[\quad f'(x) < 0.$$

Vale una definición análoga para " f' cambia de negativo a positivo".

Teorema.- (criterio de la primera derivada)

Sean f una función continua sobre un intervalo I y $x_0 \in I$.

- a) Si f' cambia de positivo a negativo en x_0 , entonces f tiene un máximo local en x_0 .
- b) Si f' cambia de negativo a positivo en x_0 , entonces f tiene un mínimo local en x_0 .

Demostración.-

- a) f es creciente sobre $]x_0 - \delta, x_0[$ y f es decreciente sobre $]x_0, x_0 + \delta[$. Luego x_0 es un punto de máximo relativo para f .
- b) Análoga.

Observación.- El criterio no da información si f no es continua en x_0 .

Ejemplos.- Determinar los extremos relativos de

1. $f(x) = 4x^3 + 9x^2 - 12x + 3$

2. $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$

Solución.-

1. $x = -2$ es un punto de máximo relativo para f .
 $x = \frac{1}{2}$ es un punto de mínimo relativo para f .
2. $x = 0$ es un punto de mínimo relativo para f .

Ejercicios.- Determine los extremos relativos de

1. $f(x) = 4x^2 - \frac{1}{x}$

2. $g(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

3. $h(x) = \cos x + \frac{1}{2}x$

Teorema.- (criterio de la 2ª derivada)

Supongamos que $f'(x_0) = 0$. Entonces

a) Si $f''(x_0) < 0$, entonces x_0 es un punto de máximo relativo para f .

b) Si $f''(x_0) > 0$, entonces x_0 es un punto de mínimo relativo para f .

Demostración.-

$$\text{a) } f''(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} < 0$$

luego existe $\delta > 0$ tal que para $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, se tiene:

$$\frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} < 0$$

por lo tanto

$$x \in]x_0 - \delta, x_0[\implies f'(x) > f'(x_0) = 0$$

$$x \in]x_0, x_0 + \delta[\implies f'(x) < f'(x_0) = 0.$$

Esto muestra que f' cambia de positivo a negativo en x_0 . En consecuencia x_0 es un punto de máximo relativo para f .

b) Análoga.

Observación.- Si $f''(x_0) = 0$, el criterio no da información.

Ejemplo.- Encontrar los extremos relativos de $f(x) = x^4 - \frac{1}{2}x$.

Solución.- $x = \frac{1}{2}$ es un punto de mínimo relativo para f .

Ejercicio.- Encontrar los extremos relativos de

$$1. f(x) = (x^2 + 2)^6$$

$$2. f(x) = x^3 - \frac{48}{x^2}$$

1.3 Aplicaciones de los valores extremos

1. Un alambre de longitud L se corta en dos partes. Con una se construye un cuadrado y con la otra una circunferencia. ¿Cuál debe ser la longitud de cada trozo para obtener la máxima y la mínima suma de las áreas?.

Solución.-

Construimos el cuadrado con un trozo de longitud x y la circunferencia con un trozo de longitud $l - x$. Tenemos:

$$A(x) = \frac{x^2}{16} + \frac{(L-x)^2}{4\pi}, 0 \leq x \leq L$$

$$A'(x) = 0 \iff x = \frac{4L}{\pi + 4}$$

$$A\left(\frac{4L}{\pi + 4}\right) = \frac{L^2}{4(\pi + 4)}; A(0) = \frac{L^2}{4\pi}; A(L) = \frac{L^2}{16}$$

$A(x)$ es máximo para $x_1 = 0$ y es mínimo para $x_2 = \frac{4L}{\pi + 4}$. Por lo tanto el área máxima se obtiene cuando el cuadrado se construye con un trozo de longitud 0 y la circunferencia de longitud L . La mínima se obtiene cuando el cuadrado se construye con un trozo de longitud $\frac{4L}{\pi + 4}$ y la circunferencia

con un trozo de longitud $\frac{\pi L + 4L - 4\pi}{\pi + 4}$.

2. Se inscribe un rectángulo en un semi-círculo de radio r tal que un lado del rectángulo está sobre el diámetro de la circunferencia. Encontrar la mayor área posible del rectángulo.

Solución.-

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

$$A(x) = 2x\sqrt{r^2 - x^2}, 0 \leq x \leq r$$

$$A'(x) = 0 \iff x = \frac{r}{\sqrt{2}}$$

$$A(0) = 0; A(r) = 0; A\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right) = r^2.$$

Luego el área del rectángulo es máxima para $x_0 = \frac{r}{\sqrt{2}}$. El área máxima del rectángulo inscrito en la circunferencia es $A\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right) = r^2$.

3. Se desea diseñar una demarcación exterior de la forma que muestra la figura siguiente y debe tener un perímetro de 440 yardas. Encontrar las dimensiones para la demarcación que maximice el área de la porción rectangular del campo encerrado en el trazado.

Solución.-

$$\begin{aligned} & \cdot \quad \text{Área del rectángulo: } A = 2\pi r \\ & \cdot \quad \text{Perímetro del campo: } 2x + 2\pi r = 440 \\ & \cdot \quad \quad \quad x = 220 - \pi r \\ & \cdot \quad A(r) = 440 - 4\pi r^2, r > 0 \\ & \cdot \quad A'(r) = 4(110 - \pi r) \\ & \cdot \quad A'(r) = 0 \iff r = \frac{110}{\pi} \\ & \cdot \quad A'(r) > 0 \iff r < \frac{110}{\pi} \\ & \cdot \quad A'(r) < 0 \iff r > \frac{110}{\pi} \\ & \cdot \quad A' \text{ cambia de positivo a negativo en } r = \frac{110}{\pi} \text{ y} \end{aligned}$$

puesto que A es continua en este punto, se tiene que $r = \frac{110}{\pi}$ es un punto de máximo relativo para la función de área. Finalmente dado que $r = \frac{110}{\pi}$ es el único punto crítico para A , se concluye que este es también un punto de máximo absoluto para esta función de área.

Las dimensiones que maximizan el área son: $x = 110$ yardas e $y = \frac{220}{\pi}$ yardas.

4. El interior de una caja con fondo cuadrado y sin tapa debe revestirse de plomo. si el volumen de la caja debe ser de 32 litros, ¿cuáles deben ser sus dimensiones para que la cantidad de plomo requerida sea mínima?.

Indicación.-

$$\begin{aligned} & \cdot \quad V = x^2y = 32dm^3 \\ & \cdot \quad A = x^2 + 4xy \\ & \cdot \quad A(x) = x^2 + \frac{128}{x}, x > 0 \\ & \cdot \quad A'(x) = 0 \iff x = 4 \\ & \cdot \quad A''(4) > 0. \end{aligned}$$

Luego $x = 4$ es un punto de mínimo relativo para la función de área. Puesto que $x = 4$ es el único punto crítico, se tiene que este también es un punto de mínimo absoluto para A .

Las dimensiones para que la cantidad de plomo sea mínima son: $x = 4dm$, $y = 2dm$.

Ejercicios.-

1. Las margenes superior e inferior de una página son de $1\frac{1}{2}$ pulgadas c/u.
Si el área de material impreso debe ser fija e igual a 30 pulgadas², ¿cuáles son als dimensiones de la página de área total mínima?.
2. Se desea construir un depósito de aceite en forma de cilindro circular recto, con capacidad de V litros. Determine las dimensiones con el fin de emplear la mínima cantidad de material.
3. Se ha de tender un cable desde una planta de energía situada a un lado de un río de 90 metros de ancho hasta una fábrica situada al otro lado del río a 300 metros agua abajo. El costo del tendido a través del agua es de \$600 el metro, mientras que el costo sobre la tierra ews de \$480 el metro.
¿Cuál es la ruta más economica sobre la que puede tenderse el cable?.

1.4 Convexidad y puntos de inflexión

Definición.-

- a) Diremos que la gráfica de f es concava hacia arriba sobre el intervalo I de extremos a y b si la gráfica de f está bajo la recta que une los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.
- b) Diremos que la gráfica de f es concava hacia abajo sobre el intervalo I de extremos a y b si la gráfica de f está sobre la recta que une los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.

Concava hacia arriba sobre $[a, b]$ Concava hacia abajo sobre $[a, b]$

Teorema.- Sea f dos veces derivable sobre el intervalo I .

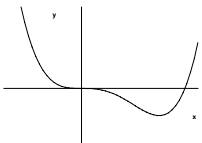
- a) Si $(\forall x \in I) f''(x) > 0$, la gráfica de f es concava hacia arriba sobre I .
 - b) Si $(\forall x \in I) f''(x) < 0$, la gráfica de f es concava hacia abajo sobre I .
- Demostración.- Ver Ellis y Gulick: "Calculus with Analytic Geometry",
página 342.

Ejemplo.- Estudiar concavidades de $f(x) = 3x^4 - 4x^3$.

Solución.-

$f(x) = x^3(3x - 4)$ $f'(x) = 12x^2(x - 1)$ $f''(x) = 12x(3x - 2)$

x		0		$\frac{2}{3}$		1	
$f'(x)$	--	0	--	—	--	0	++
$f''(x)$	++	0	--	0	++	+	++
$f(x)$		0		$-\frac{16}{27}$		-1	



f es concava hacia arriba sobre $] -\infty, 0[$ y sobre $]\frac{2}{3}, +\infty[$.
 f es concava hacia abajo sobre $]\frac{2}{3}, 0[$.

Ejercicios.- Estudiar

- $f(x) = x^4 - 6x^2 + 8x + 10$
- $f(x) = x + \frac{1}{x}$
- $f(x) = x\sqrt{x^2 - 4}$

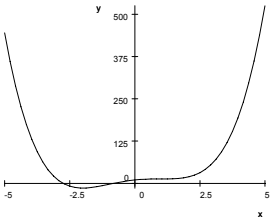
Definición.- El punto $(x_0, f(x_0))$ es un punto de inflexión del gráfico de f si existe $\delta > 0$ tal que la gráfico de f es concavo hacia arriba sobre $]x_0 - \delta, x_0[$ y concava hacia abajo sobre $]x_0, x_0 + \delta[$ [o viceversa].

Ejemplos.-

- En el anterior $(0, 0), (\frac{2}{3}, -\frac{16}{27})$ son puntos de inflexión de la gráfica de f .
- Para $f(x) = x^4 - 6x^2 + 8x + 10$, tenemos:
 $f''(x) = 12(x + 1)(x - 1)$

x		-1		1	
$f''(x)$	$++$	0	$--$	0	$++$

f es concava hacia arriba sobre $] -\infty, -1[$ y sobre $]1, +\infty[$.
 f es concava hacia abajo sobre $] -1, 1[$.
Luego $]1, 13[$ y $] -1, -3[$ son puntos de inflexión de la gráfica de f .

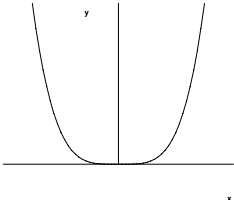


Ejercicios.- Encontrar los puntos de inflexión de la gráfica de

- $f(x) = \cos x$
- $f(x) = \sin x$
- $f(x) = 4x^3 - 6x^2 - 9x$
- $f(x) = \cos^2 x$

Observación.-

- Si $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ es derivable y $(x_0, f(x_0))$ es un punto de inflexión de la gráfica de f y $f''(x_0)$ existe, entonces $f''(x_0) = 0$.
- Si $f(x) = x^4$, entonces $f''(0) = 0$. Sin embargo $(0, 0)$ no es un punto de inflexión de la gráfica de f .
 $f(x) = x^4$



1.5 Gráficos

Ejemplos.- Obtener el gráfico de las funciones definidas por:

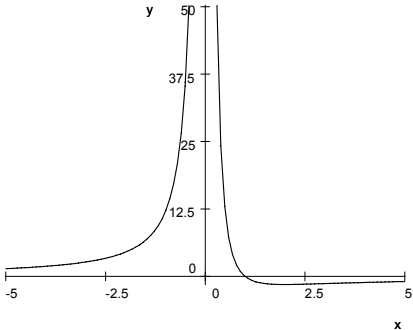
- 1. $f(x) = \frac{6}{x^2} - \frac{6}{x}$
- 2. $f(x) = \frac{2x^3}{(2x-1)^2}$

Solución.-

- 1. Intersecciones.-
 - . eje x : $(1,0)$
 - . eje y : No hay
- Simetrías.- No hay

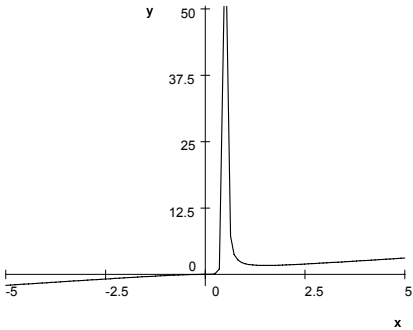
- Asintotas.-
- . verticales: $x = 0$
 - . horizontales: $y = 0$
 - . Oblicuas: No hay

x		0		1		2		3	
$f(x)$		$\times$		0		$-\frac{3}{2}$		$-\frac{4}{3}$	
$f'(x)$	++	$\times$	--	-	--	0	++	+	++
$f''(x)$	++	$\times$	++	+	++	+	++	0	--
	$\nearrow \cup$	$\times$	$\searrow \cup$		$\searrow \cup$	mín. rel.	$\nearrow \cup$	pto. inf.	$\nearrow \cap$



- 2. Intersecciones.-
 - . eje x : $(0,0)$
 - . eje y : $(0,0)$
- Simetrías.- No hay

- Asintotas.-
- . verticales: $x = \frac{1}{2}$
 - . horizontales: No hay
 - . Oblicuas: $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ ($x \rightarrow +\infty, x \rightarrow -\infty$)



Ejercicios.- Obtener el gráfico de las funciones definidas por:

1. $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$

5. $f(x) = x^4 - 6x^2$

2. $f(x) = \frac{x^2 - 4}{2x}$

6. $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$

3. $f(x) = \frac{2x}{(x - 1)(x + 2)}$

7. $f(x) = x^{\frac{1}{3}}(x + 2)^{-\frac{2}{3}}$

4. $f(x) = \frac{4x}{x^2 + 16}$

8. $f(x) = \begin{cases} |x^2 - 4| & , \quad x \in [-4, 4] \\ \frac{x + 1}{x - 4} & , \quad x > 4 \\ x^4 + 10x^3 & , \quad x < -4 \end{cases}$

Cálculo I y II - 520141
Departamento de Matemática
Universidad de Concepción
10/06/2005
JRC